# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. 1. Januar 1923. 24. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 10. Januar 1923.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

M. Born u. E. Hückel, Zur Quantentheorie mehratomiger Molekeln. S. 1.

G. Niese, Apparat zur elektrolytischen Reindarstellung von Wasserstoff. S. 12.

S. J. Barnett, Magnetisierung, Rotation und Atomstruktur. S. 14.

J. Würschmidt, Zur Lichtbrechung in Zylindern und Kugeln. S. 14.

H. Bongards, Radioaktive Zerfallsprodukte in der Atmosphäre und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne. S. 16.

W. Schottky, Über die scheinbare Frequenzabhängigkeit des elektrischen Elementarquantums bei Schroteffektmessungen. S. 19.

**Besprechungen:**

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. S. 21.

K. Graff, Astrophysik. S. 21.

Le Vicomte Haldane, Le Règne de la Relativité. S. 22.

K. Bangert, Maße und Maßsysteme mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik. S. 22.

P. Gruner, Leitfaden der geometrischen Optik. S. 22.

M. v. Laue, Das physikalische Weltbild. S. 22.

A. Lotze, Die Grundgleichungen der Mechanik. S. 23.

M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. S. 23.

J. Becquerel, Le Principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation. S. 23.

J. Pacotte, La Physique théorique nouvelle. S. 24.

M. Franck, La Loi de Newton est la Loi unique. S. 24.

**Personalien.** S. 24.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Zur Quantentheorie mehratomiger Molekeln.


Von M. Born und E. Hückel.


#### Einleitung.

Die Untersuchungen von A. Kratzer[1]) über die Bandenspektra mehratomiger Molekeln, insbesondere der zweiatomigen Halogenwasserstoffe haben gezeigt, daß man zur Erklärung der feineren Gesetzmäßigkeiten die Wechselwirkung zwischen den Freiheitsgraden der Rotation und der Schwingung berücksichtigen muß. Herr Kratzer hat die Rechnung für zweiatomige Molekeln durchgeführt mit Hilfe einer Methode, die an die Sommerfeldsche Formulierung der Quantenbedingungen anknüpft. Die von ihm benutzte Annäherungsrechnung ist nur für heteropolare Molekeln durchführbar, bei denen die potentielle Energie der Kerne aufeinander eine Entwicklung nach dem reziproken Kernabstand gestattet, die mit dessen erster Potenz anfängt.

Im ersten Teil der vorliegenden Mitteilung soll gezeigt werden, daß sich die Koppelungsgesetze zwischen Rotation und Schwingung in sehr einfacher Weise und mit beliebigem Grade der Annäherung mit Hilfe der Methode der Quantelung gestörter Systeme[2]) gewinnen lassen[3]). Dabei wird über die potentielle Energie keine andere Voraussetzung gemacht, als daß sie allein eine Funktion der Entfernung zwischen den Kernen ist. Es ergibt sich dann, daß die in der Termdarstellung der Banden vorkommenden Konstanten sich sämtlich außer durch die Massen und den Kernabstand in der Gleichgewichtslage durch die sukzessiven Ableitungen der potentiellen Energie nach dem Kernabstand, genommen an der Stelle des Gleichgewichts, ausdrücken lassen. Bei Annahme des Kraftgesetzes von Kratzer erhalten wir die von diesem abgeleiteten Formeln.

Im zweiten Teil wird diese Theorie auf mehratomige Molekeln erweitert. Bei diesen steht die Achse der Rotation nicht wie bei den zweiatomigen im Raume fest; daraus entspringt eine sehr viel verwickeltere wechselseitige Beeinflussung von Schwingungen und Rotation[1]). Auch hier führt die Methode der Störungsquantelung zum Ziel, wenn auch nicht in so einfacher Weise, wie das bei den zweiatomigen Molekeln möglich ist. Wir beschränken uns in dieser Mitteilung auf eine Skizzierung des Rechenverfahrens, aus dem sich in jedem Spezialfalle die expliziten Schlußformeln auf genau vorgeschriebenem Wege, wenn auch mit langwierigen Rechnungen, gewinnen lassen, und geben kurz den Gang und

1) A. Kratzer, Zeitschr. f. Phys. **3**, 289, 1920; **3**, 460, 1920.

2) M. Born u. E. Brody, Zeitschr. f. Phys. **6**, 140, 1921; **8**, 205, 1922; M. Born u. W. Pauli jr., Zeitschr. f. Phys. **10**, 137, 1922.

3) Es braucht wohl nicht betont zu werden, daß es sich hier nur um Molekeln von bestimmter Elektronenkonfiguration (ohne Elektronensprung), also um die Rotations- und Rotationsschwingungsbanden (im Ultraroten) handelt. Wir berücksichtigen ferner nicht den Elektronenimpuls, den Kratzer bei den sichtbaren Banden zur Erklärung der Dubletts und des Ausfallens der mittleren Linie heranzieht (A. Kratzer, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1922, S. 107).

1) In dem Buch von F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels (Leipzig 1903) ist in Band III, Kap. VII, § 8, S. 598 der Einfluß der Elastizität des Kreiselmaterials auf die Bewegung im Hinblick auf die astronomischen Fragen der Planetendrehung diskutiert. Eine Untersuchung des Falls der Rotation eines Systems von Massenpunkten, welche durch sehr große Kräfte an stabile Gleichgewichtslagen gebunden sind, haben wir in der Literatur nicht gefunden.

das Resultat der Rechnung an für den Fall, daß die Molekel im Gleichgewichtszustand einen symmetrischen Kreisel darstellt. Die Anwendung auf spezielle Fälle, insbesondere auf dreiatomige Molekeln behalten wir späterer Mitteilung vor. Ebenso wird die Bearbeitung des Beobachtungsmaterials vom Standpunkte dieser Theorie wegen der äußersten Kompliziertheit der Verhältnisse noch längere Zeit in Anspruch nehmen, sofern überhaupt die bisher vorliegenden Messungen dazu ausreichen.

## I. Abschnitt. Zweiatomige Molekeln.

### § 1. Näherungsformeln für kleine Schwingungen bei beliebiger Rotationsfrequenz.

Eine zweiatomige Molekel bestehe aus den beiden Atomen mit den Massen $m_1$, $m_2$ im jeweiligen Abstand $r$. Die potentielle Energie $U$ sei eine Funktion lediglich von $r$:

$$U = U(r).$$

Es existiere für das ruhende System eine Gleichgewichtslage $r = r_0$; in dieser ist

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=r_0} = U'(r_0) = 0. \tag{1}$$

Ein möglicher Bewegungszustand des Systems ist der, daß es um eine raumfeste, durch den Schwerpunkt $S$ der Massen gehende, auf der Verbindungslinie der Massen (Kernachse) senkrechte Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ und konstantem Kernabstand $\bar{r}$ rotiert. Dabei müssen Zentrifugalkraft und quasielastische Kraft miteinander im Gleichgewicht sein:

$$\mu \bar{r} \dot{\varphi}_0^2 = \left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=\bar{r}} = \bar{U}', \tag{2}$$

wo

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{3}$$

ist.

Diesen Bewegungszustand nehmen wir als Ausgang für ein Annäherungsverfahren zur Behandlung kleiner Schwingungen. Wir denken uns den Abstand $\bar{r}$ um die kleine Entfernung $x$ vermehrt: $r = \bar{r} + x$, und entwickeln die kinetische und die potentielle Energie nach Potenzen von $x$. Die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + (\bar{r} + x)^2\dot{\varphi}^2).$$

Wir führen das Gesamtimpulsmoment

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu(\bar{r} + x)^2\dot{\varphi} = \mu\bar{r}^2\dot{\varphi}_0, \tag{4}$$

ein, das bei der Bewegung konstant bleibt, und den Schwingungsimpuls

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \mu\dot{x}.$$

Dann wird

$$T = \frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + \frac{p^2}{(\bar{r} + x)^2}\right).$$

Wir nehmen an, daß $x << \bar{r}$ ist und entwickeln nach Potenzen von $x$:

$$T = \frac{1}{2\mu}\left[p_x^2 + \frac{p^2}{\bar{r}^2}\left[1 - 2\frac{x}{\bar{r}} + 3\left(\frac{x}{\bar{r}}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{\bar{r}}\right)^3 + \cdots\right]\right]. \tag{5}$$

Ebenso entwickeln wir die potentielle Energie nach $x$:

$$\left.\begin{aligned} U = U(\bar{r} + x) = \bar{U} + \bar{U}'x + \frac{1}{2!}\bar{U}''x^2 \\ + \frac{1}{3!}\bar{U}'''x^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Nun bilden wir die Hamiltonsche Funktion $H = T + U$. Der Faktor von $x$ in der Entwicklung von $H$ verschwindet; denn es ist nach (2) und (4):

$$-\frac{p^2}{\mu\bar{r}^3} + \bar{U}' = -\mu\bar{r}\dot{\varphi}_0^2 + \bar{U}' = 0. \tag{6}$$

Also bleibt:

$$\left.\begin{aligned} H = T + U = \left[\frac{p^2}{2\mu\bar{r}^2} + \bar{U}\right] + \frac{1}{2\mu}p_x^2 + \left[3\frac{p^2}{2\mu\bar{r}^4} + \frac{1}{2!}\bar{U}''\right]x^2 + \left[-4\frac{p^2}{2\mu\bar{r}^5} + \frac{1}{3!}\bar{U}'''\right]x^3 \\ + \left[5\frac{p^2}{2\mu\bar{r}^6} + \frac{1}{4!}\bar{U}^{(4)}\right]x^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hier ist $\bar{r}$ als Funktion des gesamten Impulsmoments $p$ aus der Gleichung (6) berechnet und eingesetzt zu denken. Dann ist $H(x, p_x)$ die Hamiltonsche Funktion eines linearen Oszillators mit nichtharmonischer Bindung. Die Theorie eines solchen ist bekannt[1]). Um die von Born und Brody angegebenen Formeln anzuwenden, bringen wir den Ausdruck für die Energie durch die Substitution

$$\sqrt{\mu}\,x = q, \quad \frac{1}{\sqrt{\mu}}p_x = p_q \tag{8}$$

auf die Normalform

$$H = W_0 + \tfrac{1}{2}(p_q^2 + \omega^2 q^2) + aq^3 + bq^4 + \cdots, \tag{9}$$

wobei

[1]) S. Boguslawski, diese Zeitschr. 15, 569, 1914; M. Born u. E. Brody, l. c.; die im Text angegebene Formel (11) ergibt sich aus den dort mitgeteilten durch Spezialisierung auf einen Freiheitsgrad.

$$W_0 = \frac{\phi^2}{2\mu\bar{r}^2} + \bar{U};$$
$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 = \frac{1}{\mu}\left[3\,\frac{\phi^2}{\mu\bar{r}^4} + \bar{U}''\right],$$
$$a = \frac{1}{\mu^2}\left[-\frac{4\phi^2}{2\mu\bar{r}^5} + \frac{1}{3!}\,\bar{U}'''\right], \qquad (10)$$
$$b = \frac{1}{\mu^2}\left[5\,\frac{\phi^2}{2\mu\bar{r}^6} + \frac{1}{4!}\,\bar{U}^{(4)}\right].$$

Alle diese Größen sind vermöge der Gl. (6) Funktionen von $\phi$. Nun liefert die Theorie des anharmonischen Oszillators für die Energiekonstanten $H = W$ den Ausdruck

$$W = W_0 + J_1\nu + \tfrac{1}{2}J_1^2\nu^2\left[-\frac{15a^2}{2\cdot(2\pi\nu)^6} + \frac{3b}{(2\pi\nu)^4}\right] + \cdots, \qquad (11)$$

wo

$$J_1 = \oint p_q\,dq$$

das zum Freiheitsgrad $q$ gehörige Wirkungsintegral ist. Führt man für das in den Größen (10) vorkommende $\phi$ das Wirkungsintegral der Rotation $J = 2\pi\phi$ ein, so ist damit die Energie als Funktion der Quantenzahlen dargestellt, denn es ist

$$J = hn, \quad J_1 = hn_1. \qquad (12)$$

## § 2. Näherungsformeln für kleine Rotationsfrequenzen.

Zur wirklichen Ausrechnung ist es noch nötig, die transzendente Gleichung (6) aufzulösen. Unter der Voraussetzung, daß

$$\frac{\bar{r} - r_0}{r_0} \ll 1$$

ist, führt eine Potenzentwicklung nach

$$\beta = \frac{\phi^2}{\mu} = \frac{J^2}{(2\pi)^2\mu} \qquad (13)$$

zum Ziel. Wir setzen die Lösung der Gleichung (6) an in der Form:

$$\bar{r} = r_0 + r_1\beta + r_2\beta^2 + r_3\beta^3 + \cdots \qquad (14)$$

Ist nun $\varphi(\bar{r})$ eine beliebige Funktion von $r$, so erhält man für $\varphi(\bar{r})$ folgende Entwicklung nach Potenzen von $\beta$:

$$\varphi(\bar{r}) = \varphi_0 + \varphi_0' r_1\beta + \tfrac{1}{2}[2\varphi_0' r_2 + \varphi_0'' r_1^2]\beta^2 + \cdots, \qquad (15)$$

wo $\varphi_0, \varphi_0', \ldots$ die Werte der Funktion $\varphi$ und ihrer Ableitungen für $r = r_0$ sind. Schreiben wir nun die Gleichung (6)

$$\beta = \bar{r}^3 U'(\bar{r}),$$

und entwickeln die rechte Seite nach dem Schema (15), so erhält man durch Koeffizientenvergleichung unter Berücksichtigung von (1):

$$r_1 = \frac{1}{r_0^3 U_0''},$$
$$r_2 = -\frac{3}{r_0^7 U_0''^2}\left(1 + \frac{r_0}{6}\,\frac{U_0'''}{U_0''}\right),$$

In den Formeln (10) kommen nun die Werte von $U$ und seinen Ableitungen (außer $U'$) für $r = \bar{r}$ vor. Entwickeln wir diese ebenfalls nach dem Schema (15), so erhalten wir:

$$\bar{U} = U_0 + \frac{1}{2r_0^6 U_0''}\beta^2 + \cdots$$
$$\bar{U}'' = U_0'' + \frac{U_0'''}{r_0^3 U_0''}\beta + \cdots$$
$$\bar{U}''' = U_0''' + \cdots$$
$$U^{(4)} = U_0^{(4)} + \cdots$$

Dabei sind soviele Glieder der Entwicklung hingeschrieben, daß die Genauigkeit im Schlußresultat so weit geht, als es die zurzeit vorhandene Genauigkeit der Beobachtungen erfordert.

Daraus berechnet man nach (10):

$$W_0 = U_0 + \frac{1}{2r_0^2}\beta - \frac{1}{2r_0^6 U_0''}\beta^3 + \cdots,$$
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{U_0''}{\mu}}\left[1 + \frac{1}{2U_0''}\left(\frac{3}{r_0^4} + \frac{U_0'''}{r_0^3 U_0''}\right)\beta + \cdots\right],$$
$$a^2 = \frac{1}{\mu^3}\left[\frac{U_0'''^2}{36} + \cdots\right],$$
$$b = \frac{1}{\mu^2}\left[\frac{U_0^{(4)}}{24} + \cdots\right].$$

Substituiert man diese Ausdrücke in (11) und führt nach (12) und (13) statt $J$ und $\beta$ die Quantenzahlen $n$, $n_1$ ein, so erhält man die Energie als Funktion der Rotationsquantenzahl $n$ und der Schwingungsquantenzahl $n_1$:

$$W = U_0 + \frac{n^2h^2}{2\cdot(2\pi)^2\mu r_0^2} - \frac{n^4h^4}{2\cdot(2\pi)^4\mu^2 r_0^6 U_0''} + \frac{n_1 h}{2\pi}\sqrt{\frac{U_0''}{\mu}}\left[1 + \frac{n^2h^2}{2\cdot(2\pi)^2\mu r_0^4 U_0''}\left(3 + r_0\frac{U_0'''}{U_0''}\right)\right] - \frac{n_1^2h^2}{48\cdot(2\pi)^2\mu}\left[5\left(\frac{U_0'''}{U_0''}\right)^2 - 3\,\frac{U_0^{(4)}}{U_0''}\right] + \cdots \qquad (16)$$

Durch Berücksichtigung höherer Potenzen sowohl von $n$ als von $n_1$ läßt sich die Näherung beliebig weiter treiben, als es hier ausgeführt ist.

Setzt man mit Kratzer für das Potential eine Funktion der Form

$$U = -\frac{e^2}{r}\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \cdots\right)$$

ein, so ergeben sich aus (16) für die Koeffizienten der Energie die von Kratzer angegebenen Ausdrücke. Die aus den Beobachtungen abgeleiteten und von Kratzer angegebenen Werte für die Koeffizienten der Energie ermöglichen eine Bestimmung der Ableitungen des Potentials nach der Entfernung, genommen an der Stelle des Gleichgewichts. Der Übersichtlichkeit halber sei hier hingeschrieben, wie sich die Koeffizienten der Energie (in Kratzerscher Bezeichnungsweise[1]) durch diese Ableitungen des Potentials ausdrücken:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{U_0''}{\mu}},$$

$$\varkappa = \frac{h}{48\pi\sqrt{\mu}\,U_0''^{3/2}}\left(5\frac{U_0'''^2}{U_0''} - 3U_0^{(4)}\right),$$

$$a_{n_1} = -n_1\cdot\frac{h^2}{16\pi^3\mu^{3/2}r_0^4\sqrt{U_0''}}\left(3 + r_0\frac{U_0'''}{U_0''}\right) + \cdots,$$

$$u = \frac{h}{2\pi r_0^2\sqrt{\mu U_0''}};$$

außerdem führt Kratzer das Trägheitsmoment $J_0 = \mu r_0^2$ ein, welches die Molekel im Gleichgewichtszustand besitzt.

In analoger Weise, wie dies hier für die zweiatomigen Molekeln geschehen ist, läßt sich die hier benutzte Methode für die Behandlung der Wechselwirkung von Schwingungen und Rotation auf solche dreiatomigen Molekeln anwenden, bei denen im Gleichgewichtszustande die drei Atome auf einer Geraden liegen, da bei diesen ebenfalls die Rotationsachse im Raume festliegt. Bei solchen Molekeln jedoch, bei denen die Atome nicht auf einer Geraden liegen, ist dies nicht der Fall und die dadurch bedingte viel kompliziertere Wechselwirkung läßt sich dann nicht mehr in dieser einfachen Weise behandeln. Hier führt jedoch eine andere Methode zum Ziel, die wir in dem nun folgenden zweiten Teil dieser Arbeit entwickeln wollen.

## II. Abschnitt. Mehratomige Molekeln.

### § 1. Energie eines rotierenden Oszillatorensystems.

Es sei $\Sigma'$ $(x', y', z')$ ein im Raume festes Koordinatensystem, $\Sigma$ $(x, y, z)$ ein Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem von $\Sigma'$ zusammenfällt, das sich aber beliebig im Raume dreht.

Die kinetische Energie eines Systems von $n$ Massenpunkten mit den Massen

$$m_1 \cdots m_k, \cdots m_n$$

und den Koordinaten

$$x_1', y_1', z_1', \cdots x_k', y_k', z_k', \cdots x_n', y_n' z_n'$$

ist:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{x}_k'^2 + \dot{y}_k'^2 + \dot{z}_k'^2).$$

Seien $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$ die Komponenten der momentanen Drehungsgeschwindigkeit von $\Sigma$ gegen $\Sigma'$ in bezug auf die Achsen des gedrehten Koordinatensystems $\Sigma$ (welche sich in bekannter Weise durch die Richtungskosinusse ausdrücken[1]), so lautet in den Koordinaten $x_k$, $y_k$, $z_k$ des gedrehten Systems der Ausdruck für die kinetische Energie:

$$T = T_0 + \tfrac{1}{2}(A\mathfrak{d}_x^2 + B\mathfrak{d}_y^2 + C\mathfrak{d}_z^2) - (E\mathfrak{d}_y\mathfrak{d}_z + F\mathfrak{d}_z\mathfrak{d}_x + G\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y) + L\mathfrak{d}_x + M\mathfrak{d}_y + N\mathfrak{d}_z, \quad (17)$$

wobei

$$T_0 = \sum_k m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \quad (17a)$$

die kinetische Energie bezüglich des bewegten Systems $\Sigma$,

$$A = \sum_k m_k(y_k^2 + z_k^2),\ B = \cdots,\ C = \cdots \quad (17b)$$

die momentanen Trägheitsmomente,

$$E = \sum_k m_k y_k z_k,\ F = \cdots,\ G = \cdots \quad (17c)$$

die momentanen Deviationsmomente, und

$$L = \sum_k m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k),\ M = \cdots,\ N = \cdots \quad (17d)$$

die momentanen Drehmomente der Trägheitskräfte im bewegten System $\Sigma$ sind.

Die potentielle Energie sei nur abhängig von den relativen Lagen der Massenpunkte, zwischen denen wir Zentralkräfte[2]) als wirkend annehmen. Das Potential der Zentralkraft zwischen dem $i$ten und dem $k$ten Massenpunkt im Abstande $r_{ik}$ bezeichnen wir mit $\varphi_{ik}$. Die Zentralkräfte seien ferner so beschaffen, daß für das System eine Gleichgewichtslage existiert, welche durch die Koordinaten

$$x_k^0,\ y_k^0,\ z_k^0 \qquad (k = 1, \cdots n)$$

der Massenpunkte charakterisiert ist. Der Abstand zweier Massenpunkte in der Gleichgewichtslage ist also:

1) A. Kratzer, Zeitschr. f. Phys. 3, 297, Formeln (12) u. (13a), 1922.

1) Siehe z. B. Weber und Gans, Repertorium der Physik I. 1, S. 45. Leipzig und Berlin 1915.

2) Ob diese Annahme zutrifft, lassen wir hier, wo es uns wesentlich darauf ankommt, an einem konkreten Falle die Anwendung der Born-Paulischen Störungsquantelung darzutun, unerörtert. Man kann ohne jede Schwierigkeit den Fall beliebiger konservativer Kräfte behandeln.

$$r_{ik}^0 = \sqrt{(x_i^0 - x_k^0)^2 + (y_i^0 - y_k^0)^2 + (z_i^0 - z_k^0)^2}.$$

Diesen Gleichgewichtslagen benachbarte Lagen bezeichnen wir mit

$$x_k = x_k^0 + u_{kx}, \quad y_k = y_k^0 + u_{ky}, \quad z_k = z_k^0 + u_{kz}; \tag{18}$$

hierbei bedeuten also $u_{kx}$, $u_{ky}$, $u_{kz}$ die Komponenten der Verrückungen $u_k$ der Massenpunkte aus ihren Gleichgewichtslagen.

Wir entwickeln nun die potentielle Energie für die den Gleichgewichtslagen benachbarten Lagen nach Potenzen der Verrückungskomponenten. Dazu führen wir zunächst die relativen Gleichgewichtskoordinaten

$$\left.\begin{aligned} x_{ik}^0 &= x_i^0 - x_k^0, \quad y_{ik}^0 = y_i^0 - y_k^0, \\ z_{ik}^0 &= z_i^0 - z_k^0 \quad (i, k = 1, \cdots n; \ k \neq i), \end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

und die relativen Verrückungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} u_{ikx} &= u_{ix} - u_{kx}, \quad u_{iky} = u_{iy} - u_{ky}, \\ u_{ikz} &= u_{iz} - u_{kz} \quad (i, k = 1, \cdots n; \ k \neq i) \end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

ein. In diesen wird die potentielle Energie zwischen dem $i$ten und dem $k$ten Massenpunkt[1]):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{ik}(r_{ik}) = \varphi_{ik}(r_{ik}^0) &+ \sum_x (\varphi_{ik})_x u_{ikx} \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{x,y} (\varphi_{ik})_{xy} u_{ikx} u_{iky} \\ &+ \tfrac{1}{6} \sum_{x,y,z} (\varphi_{ik})_{xyz} u_{ikx} u_{iky} u_{ikz} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dabei ist gesetzt:

$$(\varphi_{ik})_x = x_{ik}^0 P_{ik}, \tag{19a}$$

$$(\varphi_{ik})_{xy} = \delta_{xy} P_{ik} + x_{ik}^0 y_{ik}^0 Q_{ik}, \tag{19b}$$

$$\left.\begin{aligned} (\varphi_{ik})_{xyz} = (x_{ik}^0 \delta_{yz} &+ y_{ik}^0 \delta_{zx} + z_{ik}^0 \delta_{xy}) Q_{ik} \\ &+ x_{ik}^0 y_{ik}^0 z_{ik}^0 R_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{19c}$$

wobei

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y \\ 0 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

und

$$P_{ik} = \left(\frac{1}{r_{ik}} \frac{d\varphi_{ik}}{dr_{ik}}\right)_{r_{ik} = r_{ik}^0},$$

$$Q_{ik} = \left[\frac{1}{r_{ik}} \frac{d}{dr_{ik}} \left(\frac{1}{r_{ik}} \frac{d\varphi_{ik}}{dr_{ik}}\right)\right]_{r_{ik} = r_{ik}^0},$$

$$R_{ik} = \left[\frac{1}{r_{ik}} \frac{d}{dr_{ik}} \left[\frac{1}{r_{ik}} \frac{d}{dr_{ik}} \left(\frac{1}{r_{ik}} \frac{d\varphi_{ik}}{dr_{ik}}\right)\right]\right]_{r_{ik} = r_{ik}^0}.$$

Die gesamte potentielle Energie erhält man durch Summation über alle Massenpunkte zu:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots \tag{20}$$

mit

$$U_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \varphi_{ik}(r_{ik}^0), \tag{20'}$$

$$U_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_x (\varphi_{ik})_x u_{ikx}, \tag{20''}$$

$$U_2 = \tfrac{1}{4} \sum_{i,k} \sum_{x,y} (\varphi_{ik})_{xy} u_{ikx} u_{iky}, \tag{20a}$$

$$U_3 = \tfrac{1}{12} \sum_{i,k} \sum_{x,y,z} (\varphi_{ik})_{xyz} u_{ikx} u_{iky} u_{ikz}. \tag{20b}$$

Hierin führen wir nun statt der relativen Verrückungskomponenten $u_{ikx}, \cdots$ gemäß (18b) die Verrückungskomponenten $u_{ix}, u_{kx}, \cdots$ selbst ein. Dann läßt sich zunächst $U_1$ schreiben in der Form:

$$U_1 = \sum_{i,k} \sum_x (\varphi_{ik})_x u_{ix},$$

wie man erkennt, wenn man beachtet, daß $(\varphi_{ik})_x$ bei Vertauschung der Indizes $i$, $k$ sein Vorzeichen umkehrt. Nun soll das System für $r_{ik} = r_{ik}^0$ im Gleichgewicht sein. Also muß gelten:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u_{ix}}\right)_{r_{ik} = r_{ik}^0} = 0,$$

und daraus folgen als Gleichgewichtsbedingungen die Relationen:

$$\sum_k (\varphi_{ik})_x = \sum_k P_{ik} x_{ik}^0 = 0 \quad (i = 1, \cdots n; \ x, y, z). \tag{21}$$

$U_1$ verschwindet also. Weiter lassen sich $U_2$, $U_3$, $U_4$ unter Einführung der Verrückungskomponenten selbst in der Form schreiben:

$$U_2 = -\tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_{y,z} (\varphi_{ik})_{xy} u_{ix} u_{ky}, \tag{22a}$$

$$U_3 = -\tfrac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_{x,y,z} (\varphi_{ik})_{xyz} u_{ix} u_{iy} u_{kz}, \tag{22b}$$

$$U_4 = \cdots$$

wobei rechts jetzt auch über $k = i$ zu summieren ist, indem wir die Größen $(\varphi_{ii})_{xy}$, $(\varphi_{ii})_{xyz}$ definieren durch:

$$\sum_k (\varphi_{ik})_{xy} = 0 \tag{23a}$$

$$\sum_k (\varphi_{ik})_{xyz} = 0 \qquad i = (1, \cdots n). \tag{23b}$$

Man erkennt die Identität der Ausdrücke (22a) und (20a), sowie (22b) und (20b), wenn man bedenkt, daß $(\varphi_{ik})_{xy}$ bei Vertauschung der Indizes $i$ und $k$ sein Vorzeichen behält, $(\varphi_{ik})_{xyz}$ jedoch sein Vorzeichen umkehrt, während sowohl $(\varphi_{ik})_{xy}$ als $(\varphi_{ik})_{xyz}$ bei einer Vertauschung der Indizes $x, y, z$ ihre Werte beibehalten. Wir haben also

$$U = U_0 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots, \tag{24}$$

wobei für $U_0$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ die Werte (20') bzw. (22a) bzw. (22b) einzusetzen sind.

## § 2. Eigenschwingungen und Normalkoordinaten.

Wir betrachten nun zunächst $U_2$, d. h. das in den $u_{ix} \cdots$ quadratische Glied der potentiellen Energie. $U_2$ ist wegen der Stabilität des Gleichgewichts eine nicht negative quadratische Form der Verrückungskomponenten. Es sollen nun zunächst die quadratischen Glieder $T_0 + U_2$ der Energie auf Hauptachsen transformiert werden.

1) Über die Benutzung der Buchstaben $x, y, z$ als Summationsindex siehe M. Born, Zeitschr. f. Phys. 7, 220, 1921.

Dazu muß man die Schwingungsgleichungen

$$m_i \ddot{u}_{ix} = \sum_k \sum_y (\varphi_{ik})_{xy} u_{ky} \qquad (25)$$

durch einen Ansatz

$$u_{ix} \text{ proportional } e^{i\omega t}$$

lösen. Man erhält dann die linearen Gleichungen:

$$\omega^2 m_i u_{ix} + \sum_k \sum_y (\varphi_{ik})_{xy} u_{ky} = 0. \qquad (26)$$

Ihre Determinante $3n$ten Grades gleich Null gesetzt, liefert $3n$ Wurzeln

$$\omega_j^2 \; (j = 1, \cdots 3n).$$

Von diesen verschwinden 6 (wir wollen die $\omega_j$ so numerieren, daß dies die 6 letzten werden); denn für eine Translation

$$u_{ix} = u_x$$

sind die Gleichungen (26) wegen (23a) für $\omega = 0$ erfüllt. Und ebenso erhält man für eine infinitesimale Rotation (Vektorwinkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$)

$$u_{ix} = y_i^0 \mathfrak{w}_z - z_i^0 \mathfrak{w}_y$$

aus den Gleichungen (26) die Bedingungen:

$$\sum_k \{(\varphi_{ik})_{xy} z_k^0 - (\varphi_{ik})_{xz} y_k^0\} = 0,$$

welche auf Grund von (19b) erfüllt sind. Translation und Rotation zusammen sind sechs linear unabhängige Lösungen, zu welchen je eine Frequenz $\omega = 0$ gehört.

Wir schreiben nun jede Frequenz so oft als ihre Vielfachheit beträgt: $\omega_1 \cdots \omega_{3n}$. Dann läßt sich zu jeder Frequenz $\omega_j$ eine Lösung $u_k = a_{kj}$ so zuordnen, daß das System dieser Größen $a_{kj}$ folgenden Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen genügt:

$$\sum_k m_k a_{kj} a_{kj'} = \delta_{jj'} \left(\delta_{jj'} = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq j' \\ 1 \text{ für } j = j' \end{cases}\right). \qquad (27)$$

Wir legen nun das Koordinatensystem $\Sigma$ so, daß der Nullpunkt in den Schwerpunkt und die Koordinatenachsen in die Hauptträgheitsachsen des Systems im Gleichgewicht fallen, so daß also:

$$\sum_k m_k x_k^0 = 0, \cdots, \qquad (28a)$$

$$\sum_k m_k y_k^0 z_k^0 = 0, \cdots, \cdots \qquad (28b)$$

Dann sind die zu den letzten sechs Eigenfrequenzen (Nullfrequenzen) gehörigen Lösungen der Translation und Rotation:

$$\omega_{3n-5} = 0; \quad a_{k,(3n-5)} = \frac{1}{\sqrt{m}} i_1,$$

$$\omega_{3n-4} = 0; \quad a_{k,(3n-4)} = \frac{1}{\sqrt{m}} i_2,$$

$$\omega_{3n-3} = 0; \quad a_{k,(3n-3)} = \frac{1}{\sqrt{m}} i_3,$$

$$\omega_{3n-2} = 0; \quad a_{k,(3n-2)} = \frac{1}{\sqrt{A^{(0)}}} [r_k^0, i_1],$$

$$\omega_{3n-1} = 0; \quad a_{k,(3n-1)} = \frac{1}{\sqrt{B^{(0)}}} [r_k^0, i_2],$$

$$\omega_{3n} = 0; \quad a_{k,3n} = \frac{1}{\sqrt{C^{(0)}}} [r_k^0, i_3],$$

wo

$$m = \sum_k m_k$$

die Gesamtmasse ist,

$$A^{(0)} = \sum_k m_k (y_k^{0\,2} + z_k^{0\,2}), \; B^{(0)} = \cdots, \; C^{(0)} = \cdots \qquad (29)$$

die Hauptträgheitsmomente in der Gleichgewichtslage und $i_1$, $i_2$, $i_3$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen bedeuten.

Wir nennen die zu den Nullfrequenzen gehörigen Lösungen uneigentliche, die übrigen eigentliche Eigenschwingungen; die Anzahl der letzteren ist $n' = 3n - 6$. Trennt man von den Normierungsbedingungen (27) diejenigen ab, welche auf Translation und Rotation Bezug haben, so erhält man für die eigentlichen Eigenschwingungen $a_{kj}$ $(j = 1, \cdots n')$ folgende Bedingungen:

$$\sum_k m_k a_{kj} = 0, \qquad (30a)$$

$$\sum_k m_k [a_{kj}, r_k^0] = 0, \qquad (30b)$$

$$\sum_k m_k a_{kj} a_{kj'} = \delta_{jj'}. \qquad (30c)$$

Wir führen jetzt die Normalkoordinaten $q_j$ ein vermöge der Transformation:

$$u_k = \sum_j a_{kj} q_j \text{ oder } q_j = \sum_k m_k a_{kj} u_k. \qquad (31)$$

Dabei bedeuten die letzten 6 der $q_j$,

$$q_{3n-5}, \cdots, q_{3n}$$

die Translation und Rotation des ganzen Systems als starres Gebilde. Diese setzen wir jetzt gleich Null, wir betrachten also nur solche Bewegungen, welche eigentliche kleine Schwingungen gegen das zugrunde gelegte Koordinatensystem sind. Translation und Rotation werden als endliche Bewegungen in besonderer Weise dadurch beschrieben, daß das Koordinatensystem $x, y, z$ selbst als im Raume beweglich aufgefaßt wird. Im Folgenden läuft also der Index $j$ stets von 1 bis $n' = 3n - 6$.

Durch die Transformation (31) transformiert sich die kinetische Energie $T_0$ der Schwingung und $U_2$ auf eine Summe von Quadraten. Ferner kann man auch $U_3$, $U_4$, $\cdots$ auf die $q_j$ transformieren; man erhält:

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\sum_j \dot{q}_j^2 = \tfrac{1}{2}\sum_j p_j^2 \quad \left(p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \dot{q}_j\right), \tag{32}$$

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\sum_j \omega_j^2 q_j^2, \tag{33}$$

$$U_3 = \sum_j a_j q_j^3 + \sum_{i,j} a_{ij} q_i^2 q_j + \sum_{i,j,h} a_{ijh} q_i q_j q_h, \quad (i \neq j \neq h), \tag{34}$$

wobei

$$a_j = -\tfrac{1}{2}\sum_{l,k}\sum_{x,y,z} (\varphi_{lk})_{xyz}\, a_{lj\,x}\, a_{lj\,y}\, a_{kj\,z}, \tag{34a}$$

$$a_{ij} = -\tfrac{1}{2}\sum_{l,k}\sum_{x,y,z} (\varphi_{lk})_{xyz} \left\{ a_{il\,x}\, a_{il\,y}\, a_{kj\,z} + 2\, a_{il\,x}\, a_{lj\,y}\, a_{ki\,z} \right\}, \quad (i \neq j), \tag{34b}$$

$$a_{ijh} = -\tfrac{1}{2}\sum_{l,k}\sum_{x,y,z} (\varphi_{lk})_{xyz} \left\{ a_{il\,x}\, a_{lj\,y}\, a_{kh\,z} + a_{il\,x}\, a_{lh\,y}\, a_{kj\,z} + a_{lj\,x}\, a_{lh\,y}\, a_{ki\,z} \right\}, \quad (i \neq j \neq h). \tag{34c}$$

Ebenso erhält man für $U_4$ ein Polynom vierten Grades in den $q_j$, dessen Koeffizienten sich durch die vierten Ableitungen von $\varphi_{lk}$ und die $a_{lk}$ ausdrücken.

Jetzt denken wir uns das System $\Sigma$ um den Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{d}$ gedreht und führen in den Energieausdruck (17) die Normalkoordinaten nach (31) ein. Dann wird:

$$\begin{aligned} H = T + U = T_0 + \tfrac{1}{2}(A\mathfrak{d}_x^2 + B\mathfrak{d}_y^2 + C\mathfrak{d}_z^2) - (E\mathfrak{d}_y\mathfrak{d}_z + F\mathfrak{d}_z\mathfrak{d}_x + G\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y) \\ + L\mathfrak{d}_x + M\mathfrak{d}_y + N\mathfrak{d}_z + U_0 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots \end{aligned} \tag{35}$$

Außer den schon angegebenen Ausdrücken (32) bis (34) für $T_0$, $U_0$, $U_2 \cdots$ hat man hierin einzusetzen:

$$A = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)}, \quad B = \cdots, \quad C = \cdots,$$

wo

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \sum_k m_k (y_k^{0\,2} + z_k^{0\,2}) \text{ (siehe (29))}, \\ A^{(1)} &= \sum_j A_j q_j \text{ mit } A_j = 2\sum_k m_k (y_k^0\, a_{kj\,y} + z_k^0\, a_{kj\,z}), \\ A^{(2)} &= \sum_{jj'} A_{jj'} q_j q_{j'} \text{ mit } A_{jj'} = \sum_k m_k (a_{kj\,y}\, a_{kj'\,y} + a_{kj\,z}\, a_{kj'\,z}); \end{aligned} \tag{35a}$$

$$E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)}, \quad F = \cdots, \quad G = \cdots,$$

wo

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= 0 \text{ (weil die Deviationsmomente für die Gleichgewichtslage verschwinden (siehe (28b))}, \\ E^{(1)} &= \sum_j E_j q_j \text{ mit } E_j = \sum_k m_k (y_k^0\, a_{kj\,z} + z_k^0\, a_{kj\,y}), \\ E^{(2)} &= \sum_{jj'} E_{jj'} q_j q_{j'} \text{ mit } E_{jj'} = \sum_k m_k\, a_{kj\,y}\, a_{kj\,z}; \end{aligned} \tag{35b}$$

$$L = L^{(0)} + L^{(1)} + L^{(2)}, \quad M = \cdots, \quad N = \cdots,$$

wo

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= 0, \\ L^{(1)} &= 0 \text{ (nach (30b))}, \\ L^{(2)} &= \sum_{jj'} L_{jj'} q_j \dot{q}_{j'} \text{ mit } L_{jj'} = \sum_k m_k (a_{kj\,y}\, a_{kj'\,z} - a_{kj\,z}\, a_{kj'\,y}), \qquad L_{jj} = 0. \end{aligned} \tag{35c}$$

## § 3. Anwendung der Störungsrechnung.

Wir fassen nun als unabhängige Koordinaten des Systems die $3n - 6 = n'$ Schwingungskoordinaten $q_j$, ferner die drei Koordinaten des Schwerpunktes (die für die zu quantelnde Energie nicht in Betracht kommen) und die drei Eulerschen Winkel auf, welche die Lage des Systems $\Sigma$ gegen das System $\Sigma'$ bestimmen, und deren Ableitungen nach der Zeit in bekannter Weise mit den Komponenten des Vektors $\mathfrak{d}$ zusammenhängen.

Die Koppelung zwischen Schwingungs- und Rotationsbewegung beruht einmal auf den Größen $L, M, N$ und zweitens auf der Abhängigkeit der Trägheitsmomente und Deviationsmomente von den Schwingungskoordinaten $q_j$. Um die Größenordnung dieser Abhängigkeiten hervortreten zu lassen, führen wir einen Parameter $\lambda$ ein, indem wir statt (35a), (35b), (35c) setzen:

$$A = A^{(0)} + \lambda A^{(1)} + \lambda^2 A^{(2)}, \ldots, \ldots; \tag{36a}$$

$$E = \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)}, \ldots, \ldots; \tag{36b}$$

$$L = \lambda^2 L^{(2)}, \ldots, \ldots. \tag{36c}$$

Um zugleich zum Ausdruck zu bringen, daß

die Glieder von höherer als zweiter Ordnung in der potentiellen Energie erst bei starken Amplituden merklich werden, schreiben wir[1])

$$U = U_0 + U_2 + \lambda U_3 + \lambda^2 U_4 + \ldots \quad (37)$$

Sodann bekommen wir für die gesamte Energie:

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \lambda^3 H_3 + \ldots \quad (38)$$

mit

$$H_0 = U_0 + \tfrac{1}{2}\sum_k (p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) + \tfrac{1}{2}(A^{(0)}\mathfrak{d}_x^2 + B^{(0)}\mathfrak{d}_y^2 + C^{(0)}\mathfrak{d}_z^2), \quad (38a)$$

$$H_1 = U_3 + \tfrac{1}{2}(A^{(1)}\mathfrak{d}_x^2 + B^{(1)}\mathfrak{d}_y^2 + C^{(1)}\mathfrak{d}_z^2) - (E^{(1)}\mathfrak{d}_y\mathfrak{d}_z + F^{(1)}\mathfrak{d}_z\mathfrak{d}_x + G^{(1)}\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y), \quad (38b)$$

$$H_2 = U_4 + \tfrac{1}{2}(A^{(2)}\mathfrak{d}_x^2 + B^{(2)}\mathfrak{d}_y^2 + C^{(2)}\mathfrak{d}_z^2) - (E^{(2)}\mathfrak{d}_y\mathfrak{d}_z + F^{(2)}\mathfrak{d}_z\mathfrak{d}_x + G^{(2)}\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_y) + L^{(2)}\mathfrak{d}_x + M^{(2)}\mathfrak{d}_y + N^{(2)}\mathfrak{d}_z, \quad (38c)$$

$$H_3 = U_5,$$

$$\ldots\ldots$$

Die Energiefunktion $H_0$ zerfällt additiv in einen Schwingungsanteil und einen Rotationsanteil mit konstanten Trägheitsmomenten, läßt sich also vollständig behandeln. Man kann Winkel- und Wirkungsvariable

$$w', w, J, J' \quad \text{für die Rotation,}$$

$$w_1, \ldots, w_{n'}; \quad J_1, \ldots, J_{n'} \quad \text{für die Schwingungen}$$

einführen. Dann wird:

$$H_0 = U_0 + H_0^{(R)}(J, J') + H_0^{(S)}(J_1, \ldots, J_{n'}). \quad (39)$$

Damit ist das Problem genau auf dasjenige Schema zurückgeführt, welches in der zitierten Arbeit von Born und Pauli entwickelt ist. Man kann daher die Energiekonstante

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots \quad (40)$$

durch bloße Mittelwertsbildung über die Winkelvariabeln finden. Eine rechnerische Schwierigkeit besteht nur darin, daß der Ausdruck für die Rotationsenergie eines asymmetrischen Kreisels in den Wirkungsvariabeln sehr verwickelt ist; man kann ihn nur implizite durch ein elliptisches Integral darstellen[2]). Einfach wird diese Abhängigkeit nur, wenn das im Gleichgewicht befindliche System einen symmetrischen Kreisel darstellt.

## § 4. Beispiel: Symmetrischer Kreisel.

Zur Veranschaulichung soll nunmehr dieser Fall hier kurz skizziert werden. Die Energie setzt sich in nullter Näherung additiv zusammen aus der Schwingungsenergie $H_0^S$ und der Rotationsenergie $H_0^R$. Dabei drückt sich $H_0^S$ durch die Wirkungsvariabeln $J_j$ in der Form aus:

$$H_0^S = \sum_j \nu_j J_j; \quad (41)$$

der Übergang von den gewöhnlichen Koordinaten $q_j$ und Impulsen $p_j$ zu den Winkelvariabeln $w_j$ und den Wirkungsvariabeln $J_j$ wird durch die Transformation

$$\left.\begin{aligned} q_j &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{J_j}{2\nu_j}}\cos 2\pi w_j, \\ p_j &= -\sqrt{2 J_j \nu_j}\sin 2\pi w_j \end{aligned}\right| \quad (42)$$

dargestellt[1]).

Seien die Trägheitsmomente $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ einander gleich, so ist nach Schwarzschild[2]) ferner die Rotationsenergie $H_0^R$ des symmetrischen Kreisels:

$$H_0^R = \frac{1}{8\pi^2}\left\{\frac{J^2}{A^{(0)}} + J'^2\left(\frac{1}{C^{(0)}} - \frac{1}{A^{(0)}}\right)\right\}. \quad (43)$$

Hierin ist $\frac{J}{2\pi}$ das gesamte Impulsmoment und $\frac{J'}{2\pi}$ seine Komponente in Richtung der Figurenachse. Der Vektor $\mathfrak{d}$ beschreibt um die Figurenachse einen Kreiskegel. Machen wir die Figurenachse zur $z$-Achse, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}_x &= \frac{1}{2\pi A^{(0)}}\sqrt{J^2 - J'^2}\cos 2\pi w', \\ \mathfrak{d}_y &= \frac{1}{2\pi A^{(0)}}\sqrt{J^2 - J'^2}\sin 2\pi w', \\ \mathfrak{d}_z &= \frac{J'}{2\pi C^{(0)}}; \end{aligned}\right| \quad (44)$$

dabei bestimmt die Winkelvariable $w'$ die Drehung um die $z$-Achse, die andere Winkelvariable $w$ kommt nicht vor.

Zur Durchführung der Rechnung hat man mit Hilfe dieser Transformationen (42) und (44) $H_1, H_2, \ldots$ durch die Wirkungs- und Winkelvariabeln $J_j, w_j, J, J', w, w'$ auszudrücken. Dann wird jede dieser Funktionen eine endliche trigonometrische Reihe in den Winkelvariabeln. Neben

---

1) Will man nicht von vornherein die Annahme machen, daß die Glieder mit $A^{(1)}, E^{(1)}, \ldots$ einerseits, $U_3$ andererseits (und ebenso $A^{(2)}, E^{(2)}, L^{(2)}$; $U_4$) von gleicher Größenordnung sind, so muß man zwei Parameter $\lambda$, $\mu$ einführen und nacheinander auf die Entwicklungen nach $\lambda$ und $\mu$ dasselbe Verfahren anwenden.

2) F. Reiche, diese Zeitschr. **10**, 394, 1918; P. S. Epstein, diese Zeitschr. **20**, 289, 1919.

1) Vgl. M. Born u. E. Brody, Zeitschr. f. Phys. **6**, 140, 1921; die dort benutzten Größen $x_j, y_j, \omega_j$ hängen mit den hier benutzten $J_j, w_j, \nu_j$ zusammen durch die Gleichungen:

$$x_j = \frac{J_j}{2\pi}, \quad y_j = 2\pi w_j, \quad \omega_j = 2\pi\nu_j.$$

2) Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, 548 (III, § 10).

$$H_0 = U_0 + \sum_j \nu_j J_j + \frac{1}{8\pi^2}\left\{\frac{J^2}{A^{(0)}} + J'^2\left(\frac{1}{C^{(0)}} - \frac{1}{A^{(0)}}\right)\right\} \quad (45)$$

erhält man zunächst nach (34), (35a) . . . (35c) und (38b):

$$\begin{aligned} H_1 = {} & \sum_j a_j a_j^3 \cos^3 2\pi w_j \\ & + \sum_{j \neq k} a_{jk} a_j^2 a_k \cos^2 2\pi w_j \cos 2\pi w_k \\ & + \sum_{j \neq k \neq l} a_{jkl} a_j a_k a_l \cos 2\pi w_j \cos 2\pi w_k \cos 2\pi w_l \\ & + \tfrac{1}{2}\left[\frac{J^2 - J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2}\left\{\cos^2 2\pi w' \sum_j A_j a_j \cos 2\pi w_j \right.\right. \\ & \qquad \left. + \sin^2 2\pi w' \sum_j B_j a_j \cos 2\pi w_j\right\} \\ & \qquad \left. + \frac{J'^2}{(2\pi C^{(0)})^2} \sum_j C_j a_j \cos 2\pi w_j\right] \\ & - \frac{J'\sqrt{J^2 - J'^2}}{(2\pi)^2 A^{(0)} C^{(0)}}\left\{\sin 2\pi w' \sum_j E_j a_j \cos 2\pi w_j \right. \\ & \qquad \left. + \cos 2\pi w' \sum_j F_j a_j \cos 2\pi w_j\right\} \\ & - \frac{J^2 - J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2} \cos 2\pi w' \sin 2\pi w' \sum_j G_j a_j \cos 2\pi w_j, \end{aligned} \quad (46)$$

wobei zur Abkürzung

$$a_j = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{J_j}{2\nu_j}} \quad (47)$$

gesetzt ist[1]).

Die drei ersten Summen in (46) stellen den Anteil der Anharmonizität der Bindungen an $H_1$ dar.

Den Ausdruck für $H_2$ in den Wirkungs- und Winkelvariabeln brauchen wir nicht vollständig hinzuschreiben, wenn wir uns, wie wir das tun wollen, auf die zweite Näherung beschränken. Denn hierfür benötigen wir nur den Mittelwert von $H_2$; dieser wird:

$$\begin{aligned} \overline{H_2} = {} & \overline{f_4(w_j)} \\ & + \frac{J^2 - J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2}\left\{\cos^2 2\pi w' \sum_j A_{jj} a_j^2 \cos^2 2\pi w_j \right. \\ & \qquad \left. + \sin^2 2\pi w' \sum_j B_{jj} a_j^2 \cos^2 2\pi w_j\right\} \\ & + \frac{J'^2}{(2\pi C^{(0)})^2} \sum_j C_{jj} a_j^2 \overline{\cos^2 2\pi w_j}, \end{aligned}$$

weil alle Glieder, in denen ein sin oder cos in ungerader Potenz vorkommt, bei der Mittelung fortfallen und $N_{jj} = 0$ ist. Dies ergibt[2]), da $\overline{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2}$, unter Einführung des $J_j$ nach (47):

$$\begin{aligned} \overline{H_2} = {} & \frac{3}{8\pi^2} \sum_j b_j \frac{J_j^2}{(2\pi\nu_j)^2} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j,k} b_{jk} \frac{J_j J_k}{(2\pi)^2 \nu_j \nu_k} \\ & + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{J^2 - J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2} \sum_j (A_{jj} + B_{jj}) \frac{J_j}{2\pi\nu_j} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{2J'^2}{(2\pi C^{(0)})^2} \sum_j C_{jj} \frac{J_j}{2\pi\nu_j}\right]. \end{aligned} \quad (48)$$

In Anwendung des Born-Paulischen Rechenschemas[1]) haben wir nun zunächst

$$W_1 = \overline{H_1}$$

zu berechnen. Aus (46) sieht man sofort, daß $\overline{H_1}$ verschwindet, da alle Glieder mindestens einen sin oder cos in ungerader Potenz enthalten:

$$W_1 = 0. \quad (49)$$

Die Störungsglieder haben also in erster Näherung keinen Einfluß auf den Wert der Energie.

Zur Berechnung des Energiewertes in zweiter Näherung haben wir jetzt die Funktion $F_1(J_j, J, J', w_j, w, w')$ zu bestimmen, welche die Transformation der Wirkungs- und Winkelvariabeln des ungestörten Systems in diejenigen des Systems mit der Energiefunktion $H_0 + \lambda H_1$ liefert. Für diese Funktion gilt die Differentialgleichung[2]):

$$\sum_j \nu_j \frac{\partial F_1}{\partial w_j} + \nu \frac{\partial F_1}{\partial w} + \nu' \frac{\partial F_1}{\partial w'} = -H_1. \quad (50)$$

Um sie zu lösen, müssen wir $H_1$ in eine trigonometrische Reihe in den Winkelvariabeln umformen. Diese Umformung ergibt:

$$H_1 = f_3(J_j, w_j) + f_3^*(J_j, J, J', w_j, w'), \quad (51)$$

wobei[3])

$$\begin{aligned} & f_3(J_j, w_j) \\ & = \tfrac{1}{4} \sum_j a_j (3 a_j a_j^2 + 2 \sum_{k(\neq j)} a_{kj} a_k^2) \cos 2\pi w_j + \cdots \end{aligned} \quad (51a)$$

und

$$\begin{aligned} & f_3^*(J_j, J, J', w_j, w') \\ & = \sum_j a_j V_j \cos 2\pi w_j \\ & + \sum_j a_j T_j [\cos 2\pi(w_j + 2w') + \cos 2\pi(w_j - 2w')] \\ & + \sum_j a_j \overline{T_j} [\sin 2\pi(w_j + 2w') - \sin 2\pi(w_j - 2w')] \end{aligned}$$

---

1) Bei Born uud Brody, l. c. mit $A_j$ bezeichnet.

2) Die Berechnung des Mittelwertes von $f_4$ s. Born u. Brody, l. c. S. 149; dort ist auch die Bedeutung der Koeffizienten $b_j$ und $b_{jk}$ angegeben.

1) Born u. Pauli, S. 140ff.

2) l. c. S. 140, Gleichung (7$_1$). Es ist ja $\nu_k = \frac{\partial H_1}{\partial J_k}$.

3) Born u. Brody, l. c. S. 146, Gleichung (17); da wir den Anteil der Störungsenergie, welcher von der anharmonischen Bindung herrührend nicht mit der Rotation verkoppelt ist, nicht neu zu berechnen brauchen, genügt es hier für uns, wie wir sehen werden, nur das Glied mit $\cos 2\pi w_j$ hinzuschreiben.

$$+\sum_j \alpha_j R_j[\sin 2\pi(w_j+w') - \sin 2\pi(w_j-w')]$$
$$+\sum_j \alpha_j \overline{R_j}[\cos 2\pi(w_j+w') + \cos 2\pi(w_j-w')]; \quad (51\,b)$$

dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} V_j &= \tfrac{1}{4}\left[\frac{J^2-J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2}(A_j+B_j)+\frac{2J'^2}{(2\pi C^{(0)})^2}C_j\right] \\ T_j &= \tfrac{1}{4}\frac{J^2-J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2}\frac{A_j-B_j}{2} \\ \overline{T_j} &= \tfrac{1}{4}\frac{J^2-J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2}G_j \\ R_j &= -\tfrac{1}{2}\frac{J'\sqrt{J^2-J'^2}}{(2\pi)^2 A^{(0)}C^{(0)}}E_j \\ \overline{R_j} &= -\tfrac{1}{2}\frac{J'\sqrt{J^2-J'^2}}{(2\pi)^2 A^{(0)}C^{(0)}}F_j. \end{aligned}\right\} \quad (51\,c)$$

Nun können wir die Differentialgleichung (50) ohne weiteres integrieren; wir erhalten:

$$F_1 = F_1^{(3)}(J_j, w_j) + F_1^*(J_j, J, J', w_j, w'), \quad (52)$$

wobei[1])

$$F_1^{(3)}(J_j, w_j) = -\tfrac{1}{4}\sum_j \frac{\alpha_j}{2\pi\nu_j}(3\alpha_j\alpha_j^2 + 2\sum_{k\,(\neq j)}\alpha_{kj}\alpha_k^2)\sin 2\pi w_j + \ldots \quad (52\,a)$$

und

$$\frac{\partial F_1}{\partial w} = 0.$$

Unter Einführung von $J_j$ statt $\alpha_j$ nach (47) wird zunächst:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial J'^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial w'}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{C^{(0)}}-\frac{1}{A^{(0)}}\right)\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot$$
$$\left\{\sum_j \frac{J_j}{\nu_j}(T_j^2+\overline{T_j}^2)\left[\frac{1}{(\nu_j+2\nu')^2}+\frac{1}{(\nu_j-2\nu')^2}\right]\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{4}\sum_j \frac{J_j}{\nu_j}(R_j^2+\overline{R_j}^2)\left[\frac{1}{(\nu_j+\nu')^2}+\frac{1}{(\nu_j-\nu')^2}\right]\right\}, \quad (54)$$

wobei

$$T_j^2+\overline{T_j}^2 = \frac{1}{16}\frac{(J^2-J'^2)^2}{(2\pi A^{(0)})^4}\left[\left(\frac{A_j-B_j}{2}\right)^2+G_j^2\right],$$
$$R_j^2+\overline{R_j}^2 = \frac{1}{4}\frac{J^2J'^2-J'^4}{(2\pi)^4 A^{(0)2}C^{(0)2}}[E_j^2+F_j^2]. \quad (54\,a)$$

Weiter wird das zweite Glied in (53) nach (51) und (52):

$$\sum_j \frac{\partial H_1}{\partial J_j}\frac{\partial F_1}{\partial w_j} = \sum_j\left[\frac{\partial f_3}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^{(3)}}{\partial w_j}+\frac{\partial f_3}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^*}{\partial w_j} + \frac{\partial f_3^*}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^{(3)}}{\partial w_j}+\frac{\partial f_3^*}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^*}{\partial w_j}\right]. \quad (55)$$

Die Berechnung des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (55) ist bereits von Born und Brody ausgeführt[1]); sie ergibt:

$$\frac{\partial f_3}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^{(3)}}{\partial w_j} = \tfrac{1}{2}\sum_{jk}\nu'_{jk}J_jJ_k \quad (56)$$

mit

$$\nu'_{jj} = -\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\nu_j^2}\left\{\frac{15a_j^2}{\nu_j^2} + \sum_k a_{jk}\left(\frac{2}{\nu_k^2}-\frac{1}{4\nu_j^2-\nu_k^2}\right)\right\},$$
$$\nu'_{jk} = -\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\nu_j\nu_k}\left\{6\frac{a_ja_{kj}}{\nu_j^2}+\frac{a_ja_{jk}}{\nu_k^2}\right)$$

$$F_1^*(J_j, J, J', w_j, w') = -\sum_j \alpha_j V_j \frac{\sin 2\pi w_j}{2\pi\nu_j}$$
$$-\sum_j \alpha_j T_j\left[\frac{\sin 2\pi(w_j+2w')}{2\pi(\nu_j+2\nu')}+\frac{\sin 2\pi(w_j-2w')}{2\pi(\nu_j-2\nu')}\right]$$
$$+\sum_j \alpha_j \overline{T}_j\left[\frac{\cos 2\pi(w_j+2w')}{2\pi(\nu_j+2\nu')}-\frac{\cos 2\pi(w_j-2w')}{2\pi(\nu_j-2\nu')}\right]$$
$$+\sum_j \alpha_j R_j\left[\frac{\cos 2\pi(w_j+w')}{2\pi(\nu_j+\nu')}-\frac{\cos 2\pi(w_j-w')}{2\pi(\nu_j-\nu')}\right]$$
$$-\sum_j \alpha_j \overline{R}_j\left[\frac{\sin 2\pi(w_j+w')}{2\pi(\nu_j+\nu')}+\frac{\sin 2\pi(w_j-w')}{2\pi(\nu_j-\nu')}\right]. \quad (52\,b)$$

Zur Bestimmung von $W_2$ haben wir nun zu berechnen[2]):

$$W_2 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial J'^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial w'}\right)^2 + \sum_j \frac{\partial H_1}{\partial J_j}\frac{\partial F_1}{\partial w_j} + \frac{\partial H_1}{\partial J'}\frac{\partial F_1}{\partial w'}+H_2; \quad (53)$$

die übrigen Glieder fallen weg, denn es ist:

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_j\,\partial J_k} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_j\,\partial J} = \frac{\partial^2 H}{\partial J_j\,\partial J'} = 0$$

und

1) Born u. Brody, l. c. S. 146, Gleichungen (21), (22); s. die vorige Anmerkung.

2) Born u. Pauli, l. c. S. 140, Gleichung (72) und folgende Seiten.

1) Vgl. M. Born u. E. Brody, l. c.

$$+4\left(\frac{a_{jh}^2}{4\nu_j^2-\nu_h^2}+\frac{a_{jh}^2}{4\nu_h^2-\nu_j^2}\right)+\sum_l\left[2\frac{a_{jl}a_{hl}}{\nu_l^2}+18a_{jhl}^2\left(\frac{1}{\nu_l^2-(\nu_j-\nu_h)^2}+\frac{1}{\nu_l^2-(\nu_j+\nu_h)^2}\right)\right]\Bigg|. \tag{56a}$$

Das zweite und dritte Glied auf der rechten Seite von (55) ergeben zusammengefaßt[1]):

$$\sum\left|\frac{\partial f_3}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^*}{\partial w_j}+\frac{\partial f_3'}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^{(3)}}{\partial w_j}\right|=-\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_j\frac{1}{\nu_j^2}\left[\frac{3a_jJ_j}{\nu_j}+\sum_{h(\neq j)}\frac{a_{hj}J_j}{\nu_h}\right]V_j. \tag{57}$$

Die Berechnung des vierten Gliedes in (55) endlich liefert:

$$\sum_j\frac{\partial f_3'}{\partial J_j}\frac{\partial F_1^*}{\partial w_j}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_j\frac{1}{\nu_j}\Bigg|\frac{V_j'^2}{\nu_j}+(T_j'^2+T_j^{(2)})\left[\frac{1}{\nu_j+2\nu'}+\frac{1}{\nu_j-2\nu'}\right]+(R_j'^2+R_j^{(2)})\left[\frac{1}{\nu_j+\nu'}+\frac{1}{\nu_j-\nu'}\right]\Bigg|, \tag{58}$$

wobei noch:

$$V_j'^2=\frac{1}{16}\left[\frac{J^2-J'^2}{(2\pi A^{(0)})^2}(A_j+B_j)+\frac{2J'^2}{(2\pi C^{(0)})^2}C_j\right]^2 \tag{58a}$$

Nun haben wir in (53) nur noch das dritte Glied zu berechnen, da wir die Berechnung von $H_2$ schon ausgeführt haben. Es ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial J'}\frac{\partial F_1}{\partial w'}=&-\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_j\frac{J_j}{\nu_j}\frac{\partial}{\partial J'}(T_j^2+\overline{T}_j^2)\left[\frac{1}{\nu_j+2\nu'}-\frac{1}{\nu_j-2\nu'}\right]\\&-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_j\frac{J_j}{\nu_j}\frac{\partial}{\partial J'}(R_j^2+\overline{R}_j^2)\left[\frac{1}{\nu_j+\nu'}-\frac{1}{\nu_j-\nu'}\right],\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

wobei:

$$\frac{\partial}{\partial J'}(T_j^2+T_j^2)=-\frac{1}{4}\frac{J^2J'-J'^3}{(2\pi A^{(0)})^4}\left[\left(\frac{A_j-B_j}{2}\right)^2+G_j^2\right], \tag{59a}$$

$$\frac{\partial}{\partial J'}(R_j^2+\overline{R}_j^2)=\frac{1}{2}\frac{J^2J'-2J'^3}{(2\pi)^4A^{(0)2}C^{(0)2}}[E_j^2+F_j^2]. \tag{59b}$$

Damit haben wir die Berechnung der Energie als Funktion der Wirkungsvariabeln in zweiter Näherung durchgeführt. Wir haben jetzt nur noch die Ausdrücke (45), (48), (49), (54), (56), (57), (58), (59) zu addieren und zu ordnen. So erhalten wir einen Ausdruck von der Form:

$$W=U_0+\sum_j\nu_j^*J_j+\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{J^2}{A^{(0)2}}+J'^2\left(\frac{1}{C^{(0)}}-\frac{1}{A^{(0)}}\right)\right]+\tfrac{1}{2}\sum_{jh}\nu_{jh}J_jJ_h+\beta^{(40)}J^4+\beta^{(22)}J^2J'^2+\beta^{(04)}J'^4. \tag{60}$$

Dabei ist

$$\nu_j^*=\nu_j+\alpha_j^{(20)}J^2+\alpha_j^{(02)}J'^2+\alpha_j^{(21)}J^2J'+\alpha_j^{(03)}J'^3+\alpha_j^{(40)}J^4+\alpha_j^{(22)}J^2J'^2+\alpha_j^{(04)}J'^4, \tag{60a}$$

worin sich die Koeffizienten $\alpha_j^{(20)},\cdots$ durch die Größen

$$\left.\begin{aligned}
a_j^{(2)}&=\frac{1}{4\pi(2\pi A^{(0)})^2 2\pi\nu_j}\left[A_{jj}+B_{jj}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3a_j(A_j+B_j)}{(2\pi\nu_j)^2}+\sum_{h(\neq j)}\frac{a_{jh}(A_h+B_h)}{(2\pi\nu_h)^2}\right)\right],\\
a_j^{(2)'}&=\frac{1}{2\pi(2\pi C^{(0)})^2 2\pi\nu_j}\left[C_{jj}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3a_jC_j}{(2\pi\nu_j)^2}+\sum_{h(\neq j)}\frac{a_{jh}C_h}{(2\pi\nu_h)^2}\right)\right];\\
a_j^{(3)}&=\frac{1}{4\cdot(2\pi A^{(0)})^4(2\pi)^2\nu_j}\left[\left(\frac{A_j-B_j}{2}\right)^2+G_j^2\right]\left[\frac{1}{\nu_j+2\nu'}-\frac{1}{\nu_j-2\nu'}\right],\\
a_j^{(3)'}&=\frac{1}{4(2\pi)^4A^{(0)2}C^{(0)2}\cdot(2\pi)^2\nu_j}[E_j^2+F_j^2]\left[\frac{1}{\nu_j+\nu'}-\frac{1}{\nu_j-\nu'}\right];\\
a_j^{(4)}&=\frac{1}{16\pi(2\pi A^0)^4}\left(\frac{1}{C^{(0)}}-\frac{1}{A^{(0)}}\right)\frac{1}{(2\pi)^3\nu_j}\left[\left(\frac{A_j-B_j}{2}\right)^2+G_j^2\right]\left[\frac{1}{(\nu_j+2\nu')^2}+\frac{1}{(\nu_j-2\nu')^2}\right],\\
a_j^{(4)'}&=\frac{1}{16\pi(2\pi)^4A^{(0)2}C^{(0)2}}\left(\frac{1}{C^{(0)}}-\frac{1}{A^{(0)}}\right)\frac{1}{(2\pi)^3\nu_j}[E_j^2+F_j^2]\left[\frac{1}{(\nu_j+\nu')^2}+\frac{1}{(\nu_j-\nu')^2}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{60b}$$

[1]) Man erkennt, daß bei der Mittelwertsbildung des zweiten Gliedes in (55) nur das Glied mit $\cos 2\pi w_j$ in $f_3$ (51a), und bei der des dritten Gliedes nur das Glied mit $\sin 2\pi w_j$ in $F_1^{(3)}$ (52a) einen Beitrag liefert; daher hatten wir uns darauf beschränkt, diese Glieder hinzuzuschreiben (vgl. Anm. 3, S. 9).

in folgender Weise ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_j^{(20)} = \alpha_j^{(2)}, \qquad \alpha_j^{(02)} = -\alpha_j^{(2)} + \alpha_j^{(2')}; \\ &\alpha_j^{(21)} = \alpha_j^{(3)} - \alpha_j^{(3)'}, \\ &\alpha_j^{(03)} = -\alpha_j^{(3)} + 2\alpha_j^{(3)'}; \\ &\alpha_j^{(40)} = \alpha_j^{(4)}, \quad \alpha_j^{(22)} = -2\alpha_j^{(4)} + \alpha_j^{(4)'}, \\ &\alpha_j^{(04)} = \alpha_j^{(4)} - \alpha_j^{(4)'}. \end{aligned}\right\} \quad (60c)$$

Ferner ist

$$\nu_{jk} = \nu'_{jk} + \nu''_{jk} \quad (60d)$$

mit $\nu'_{jk}$ nach Formel (56a) und

$$\nu''_{jj} = \frac{3\,b_j}{(2\pi)^4 \nu_j^2}, \quad \nu''_{jk} = \frac{2\,b_{jk}}{(2\pi)^4 \nu_j \nu_k} \text{ [vgl. (48)]}. \quad (60e)$$

Und schließlich drücken sich die $\beta^{(40)}\ldots$ durch die Größen

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{32(2\pi A^{(0)})^4 (2\pi)^2} \sum_j \frac{1}{\nu_j} \left\{ \frac{(A_j + B_j)^2}{\nu_j} + \left[ \left( \frac{A_j - B_j}{2} \right)^2 + G_j^2 \right] \left[ \frac{1}{\nu_j + 2\nu'} + \frac{1}{\nu_j - 2\nu'} \right] \right\}, \\ \beta' &= \frac{1}{8(2\pi)^4 A^{(0)2} C^{(0)2} (2\pi)^2} \sum_j \frac{1}{\nu_j} \left\{ \frac{(A_j + B_j) C_j}{\nu_j} + [E_j^2 + F_j^2] \left[ \frac{1}{\nu_j + \nu'} + \frac{1}{\nu_j - \nu'} \right] \right\}, \\ \beta'' &= \frac{1}{8(2\pi C^{(0)})^4 (2\pi)^2} \sum_j \frac{C_j^2}{\nu_j} \end{aligned}\right\} \quad (60f)$$

in folgender Weise aus:

$$\left.\begin{aligned} \beta^{(40)} &= -\beta, \quad \beta^{(22)} = 2\beta - \beta', \\ \beta^{(04)} &= -\beta + \beta' - \beta''. \end{aligned}\right\} \quad (60g)$$

Der Ausdruck (60) für die Energie in den Wirkungsvariabeln, die bei der Quantelung gleich ganzen Vielfachen des Wirkungsquantums $h$ zu setzen sind, enthält also keine anderen Größen als die Massen der Atome, ihre Abstände in der Gleichgewichtslage und die Ableitungen der zwischen den Atomkernen wirksam gedachten Potentiale. Das Ergebnis zeigt, daß die Ausdrücke der Koeffizienten der Energie in diesen Größen schon beim symmetrischen Kreisel sehr kompliziert sind. Der Durchführung der Rechnung auch für den asymmetrischen Kreisel stehen jedoch prinzipielle Schwierigkeiten durchaus nicht im Wege.

Göttingen und Zürich, im Oktober 1922.

(Eingegangen 1. November 1922.)

## Apparat zur elektrolytischen Reindarstellung von Wasserstoff.

Von Gerhard Niese.

Für viele physikalische Untersuchungen ist reiner Wasserstoff erforderlich. Dabei zeigt sich, daß alle bisher existierenden Methoden keineswegs vollkommen reinen Wasserstoff zu entwickeln gestatten, besonders, wenn es sich um Darstellung größerer Mengen handelt. Es soll deshalb im folgenden ein Apparat beschrieben werden, der sich für diese Zwecke in jeder Hinsicht gut bewährt hat.

Zur Reindarstellung von Wasserstoff kommt ausschließlich die elektrolytische Methode in Betracht, da die thermische Zersetzung von Palladiumwasserstoff, die reinsten Wasserstoff liefert, wegen der Kostspieligkeit des Palladiums nur zur Erzeugung von sehr geringen Gasmengen verwendet werden kann.

Nach Travers besitzt das kathodisch ausgeschiedene Gas durch anodisch abgeschiedenes Gas eine gewisse Verunreinigung, die ihre Erklärung durch Diffusion innerhalb des Elektrolyten findet. Zersetzt man z. B. verdünnte Schwefelsäure im Hoffmannschen Apparat, so löst sich entwickelter Sauerstoff im Elektrolyten, gelangt durch Diffusion nach dem Kathodenschenkel, wird hier durch aufsteigende Wasserstoffbläschen aus der Flüssigkeit getrieben und verunreinigt somit den aufzufangenden Wasserstoff.

Dies kann auf einfache Weise dadurch verhindert werden, daß der mitgeführte Sauerstoff ausgewaschen wird, bevor dieser nach dem Kathodenschenkel diffundieren kann. Man erreicht dies durch eine zweite, in Nebenschluß geschaltete Kathode. Dies Prinzip ist schon von Gaede[1]) angegeben und empfohlen.

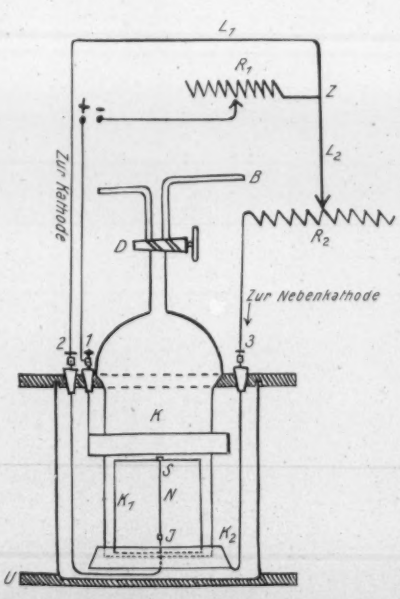
Handelt es sich um elektrolytische Entwicklung von größeren Mengen Wasserstoff, so erweist sich der von Vezes und Labatut[2]) angegebene Apparat als geeignet. Bei diesem ist aber die eingangs erwähnte Beimengung von Sauerstoff noch nicht beseitigt. Es soll deshalb im folgenden eine Anordnung beschrieben werden, die das Gaedesche Prinzip für die schnelle und sichere Erzeugung von großen Mengen Wasserstoff benutzt. Der Apparat ist leicht und mit geringem Kostenaufwand herzustellen. Er liefert reinen Wasserstoff, wie eine spektrale Untersuchung in einer elektrodenlosen Röhre zeigte. Es ist nur noch eine Trocknung über Kalziumchlorid und Phos-

1) Gaede, Ann. d. Phys. **41**, 302, 1913.
2) Vezes u. Labatut, Zeitschr. f. anorg. Chemie **32**, 464, 1902.

phorpentoxyd erforderlich. Durch Umschalten kann auch reiner Sauerstoff dargestellt werden.

Als besonderes Kriterium der Reinheit des mit angegebenem Apparat hergestellten Wasserstoffs können die Erfahrungen dienen, die mir Herr Lauch aus seiner noch nicht veröffentlichten Arbeit über metalloptische Konstante mitteilt. Es wurden durch Kathodenzerstäubung in diesem Wasserstoff Platinspiegel auf Glas hergestellt, die ohne weitere Vorsichtsmaßregeln in der Durchsicht rein graues Aussehen zeigten. Es ist bekannt, daß gerade die Herstellung rein metallischer Platinspiegel auf obige Art bisher immer auf die größten Schwierigkeiten gestoßen ist, da bereits Spuren von Verunreinigungen in der Wasserstoffatmosphäre in der Durchsicht bräunliche Platinspiegel liefern.

Beschreibung (siehe Figur): In ein zylindrisches Glasgefäß ragt, von imprägniertem Holzdeckel getragen und auf diesem mit Drahtschleife verspannt, der Kathodenraum $K$ aus Glas. Das Gefäß ruht in der zylindrischen Ausbohrung der Holzunterlage $U$, die mit dem Deckel verschraubt ist. Dieser ist sechsfach durchbohrt und mit Stopfen versehen (in Skizze nur 1, 2, 3, gezeichnet). Als Elektrodenmaterial dient reines Nickelblech. Durch 1 führt




ein 4 mm dicker Nickelstab und trägt die Anode in Form eines Zylindermantels. Durch 2 führt, von Glasrohr umgeben, ein L-förmiger Nickelstab, auf den bei $J$ ein Nickelstab $N$ aufgeschraubt ist, der die zylindrische Kathode $K1$ trägt. Die Elektrodenbleche sind zu angegebener Form gefalzt. Die Befestigung der Kathode an $N$ geschieht dadurch, daß zwei schmale Nickelbleche dem oberen Grundkreis des Zylindermantels als Durchmesser aufgefalzt und in der Mitte durchbohrt sind. $N$ hat bei $S$ Innengewinde. Die Kathode liegt mit den beschriebenen Durchmesserblechen bei $S$ auf $N$ und ist verschraubt. Durch 3 führt, von einem Glasrohr umgeben, ein Nickelstab, der die in Nebenschluß geschaltete Kathode $K2$ trägt. Diese hat die Form eines Kegelstumpfmantels und liegt dicht am Gefäßboden und ebenso dicht am Kathodenraum an, ca. 1 cm über dessen unterer Öffnung. Ferner sind durch Stopfen eingeführt: ein Trichterrohr zum Einfüllen des Elektrolyten, ein Thermometer und ein Glasrohr zum Entweichen der außerhalb des Kathodenraumes abgeschiedenen Gase.

Als Elektrolyt dient 30 prozentige chemisch reine Natronlauge. Vor Beginn der Elektrolyse wird die Flüssigkeit durch $B$ hochgesaugt, so daß alle Luft über dem Elektrolyten im Kathodenraum beseitigt ist.

Der positive Pol der Stromquelle ist mit der Anode verbunden. $Z$ ist ein Verzweigungspunkt. Leitung $L1$ geht direkt zur Kathode. $L2$ führt über Regulierwiderstand $R2$ zur Nebenkathode.

Es konnte ohne weiteres mit 30 Amp. Gesamtstromstärke belastet werden, doch wurde meist mit 20 Amp. gearbeitet, dabei waren die Widerstände so eingestellt, daß 8 Amp. über die Nebenkathode gingen. Die Spannungsverhältnisse an den Elektroden waren dabei die folgenden: Anode—Kathode ca. 8 Volt, Anode—Nebenkathode ca. 6 Volt, Nebenkathode—Kathode ca. 2 Volt. Bei 20 Amp. Gesamtstromstärke werden in einer Stunde über 7 Liter Wasserstoff erzeugt.

Es ist Bedingung des Prinzips, daß die Spannung Anode—Nebenkathode größer ist als die Spannung Nebenkathode—Kathode, damit an beiden Kathoden Wasserstoff entsteht.

Der Nachweis, daß auch an der Nebenkathode Wasserstoff entsteht, ist dadurch erbracht, daß nach Unterbrechung der Elektrolyse zwischen beiden Kathoden keine Polarisationsspannung auftritt.

Herrn Dr. Franz Rother bin ich zu

Dank verpflichtet für Rat und Unterstützung bei Durchführung der Untersuchung.

Leipzig, November 1922. Physikalisches Institut der Universität Leipzig.

(Eingegangen 7. Dezember 1922.)

## Magnetisierung, Rotation und Atomstruktur.

Von S. J. Barnett.

W. Braunbek entwickelt in dieser Zeitschrift **23**, 307, 1922 eine Theorie der Rotation durch Magnetisierung unter der Annahme, daß sich sowohl der Kern als auch das äußere Elektronensystem dreht, wobei für jeden Umlauf desselben das Verhältnis: Impulsmoment zu magnetischem Moment $2\frac{m}{e}$ beträgt.

Die von Braunbek entwickelte Theorie ist im wesentlichen identisch mit derjenigen, die 1908 O. W. Richardson[1]) veröffentlichte, und die J. Q. Stewart[2]) 1917 zu demselben Zwecke benutzte, wobei er für Eisen und Nickel ähnl che Ergebnisse wie später Beck und Arvidsson erhielt, auf die sich Braunbek bezieht, und wie neuerdings Chattock und Bates[3]).

Die ältesten erfolgreichen Untersuchungen auf diesem Gebiete sind solche über die Magnetisierung von Stahl infolge von Rotation, welche die Umkehrung des oben erwähnten Effekts darstellen, und die von L. J. H. Barnett und dem Verfasser[4]) ausgeführt und der American Physical Society 1914 vorgelegt wurden. Ihnen schlossen sich Versuche an[5]) über die infolge von Rotation auftretende Magnetisierung von Weicheisen, Kobalt, Nickel, kalt gewalztem Stahl und Heuslerschen Legierungen; für alle erwies sich sowohl unter der Annahme eines einfachen Magnetontyps, als auch für das komplexe Richardsonsche Magneton, bei dem die Achsen der rotierenden Elemente im Atom festliegen, das Verhältnis: Impulsmoment zu magnetischem Moment gleich oder nahezu gleich $\frac{m}{e}$, dem 1914 für Stahl gefundenen Werte, statt $2\frac{m}{e}$.

Richardsons Theorie berechnet das Verhältnis: Impulsmoment zu magnetischem Moment, welches (unter der einfachsten Annahme) bei all diesen Versuchen die Unbekannte ist. Seine Formel gibt die experimentellen Ergebnisse gut wieder, wenn die Rotation des positiven Kerns (oder eines Teils desselben) derjenigen der in Bewegung befindlichen Elektronen entgegengesetzt ist, und wenn die magnetischen Momente oder die Flächengeschwindigkeiten des positiven Protons vernachlässigt werden dürfen. Es bedarf der Erwähnung, daß der Kern das Verhältnis: Impulsmoment zu magnetischem Moment (welch letzteres durch die Elektronenumläufe charakterisiert ist), nicht etwa durch Beeinflussung des magnetischen Moments, sondern durch Verminderung des Winkelmoments herabdrückt, — so daß die Rotation neutraler Massen innerhalb des Kerns, wenn das überhaupt möglich wäre, für diesen Zweck genügen würde.

Während die Hypothese eines negativen und positiven Magnetons die experimentellen Ergebnisse zu erklären vermag, so kann man diese doch auch durch die Hypothese erklären, daß ein rein negatives Magneton einfachen Typs sich mit einem Verhältnis: Impulsmoment zu magnetischem Moment gleich $\frac{m}{e}$ dreht. Und es ist von Interesse, in diesem Zusammenhange darauf hinzuweisen, daß das Lorentz-Abrahamsche Elektron von gleichförmiger Oberflächenladung bei Rotation um seine Achse, wie Abraham[1]) 1903 zeigte, genau dasselbe Verhältnis $\frac{m}{e}$ besitzt.

Beide Hypothesen haben Vorzüge, und beide lassen sich mit einigen Erfahrungstatsachen nur schwer in Einklang bringen.

1) O. W. Richardson, Phys. Rev. **26**, 24, 1908.
2) J. Q. Stewart, Phys. Rev. **11**, 100, 1918.
3) Proc. Roy. Soc. A. für 16. Nov. 1922 (siehe Nature, 25. Nov. 1922).
4) S. J. Barnett, Phys. Rev. **6**, 239, 1915.
5) S. J. Barnett, Phys. Rev. **10**, 7, 1917; S. J. Barnett und L. J. H. Barnett, Proc. American Phys. Soc. für Dez. 1920 und April 1922. Siehe auch S. J. Barnett, Bull. Nat. Res. Council **3**, 235, 1922.

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. **10** 151, 159, 171, 1903.

The Carnegie-Institution of Washington, 8. Dezember 1922.

Ins Deutsche übertragen von Hans Küstner.

(Eingegangen 22. Dezember 1922.)

## Zur Lichtbrechung in Zylindern und Kugeln.

Von J. Würschmidt.

Unter dem gleichen Titel hat Herr C. Schmidt kürzlich[1]) die elementare Theorie des Ganges

1) Diese Zeitschr. **23**, 310—312, 1922.

der Lichtstrahlen in einem Zylinder entwickelt und daraus eine einfache Methode zur Bestimmung des Brechungsindex abgeleitet.

Bezeichnet man den Kugelradius mit $r$, die Entfernung des leuchtenden Punktes $L$ vom Kugelmittelpunkt $O$ mit $e$, den Winkel, den ein von $L$ ausgehender Strahl mit $LO$ bildet, mit $\varphi$, die im Winkelmaß gemessene Entfernung seines Auftreffpunktes von der Achse mit $\omega$, den Einfalls- und Brechungswinkel, wie üblich, mit $\alpha$ und $\beta$, endlich den Abstand der Austrittsstelle des Strahles von der Achse mit $\chi$, so kann $\chi$ bei gegebenem $r$ und $e$ einen Maximalwert nicht überschreiten.

Die Bedingungsgleichungen für dieses Maximum sind:

1. $\chi\,(\omega, \beta, \alpha, \varphi) = 2\beta - \omega$ soll ein Maximum sein.
2. $g\,(\omega, \beta, \alpha, \varphi) = \sin\alpha - n\sin\beta = 0$,
3. $h\,(\omega, \beta, \alpha, \varphi) = r\sin\alpha - e\sin\varphi = 0$,
4. $l\,(\omega, \beta, \alpha, \varphi) = \alpha - \omega - \varphi = 0$.

Hieraus soll sich nach Herrn C. Schmidt die einfache Beziehung:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi_{max}}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\omega_{max}}{2}\right)^3$$

ergeben. Aus dem experimentell bestimmten Winkel $\chi_{max}$ berechnet man hiermit $\omega_{max}$, dann mit Hilfe der obigen Gleichungen $\alpha_{max}$, $\beta_{max}$ und $n$.

Für den Sonderfall $e = \infty$, $\varphi = 0$ wird die Rechnung besonders einfach, indem sich hieraus ergibt:

1. $\alpha = \omega$,
2. $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$,
3. $n^2 = 4 - 3\sin^2\alpha$.

Dieser Sonderfall war von dem Verfasser bereits früher behandelt worden[1]), auch der allgemeine, auf eine Gleichung 4. Grades führende Fall war graphisch untersucht worden, indem die Beziehung zwischen $\frac{e}{r} = \mu$ und $\alpha$ für den Fall des Maximums graphisch dargestellt wurde.

Wenn der Verfasser die Frage im Anschluß an die Veröffentlichung von Herrn C. Schmidt nochmals vornimmt, so geschieht dies aus dem Grunde, um darauf hinzuweisen, daß die abgeleitete Beziehung:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi_{max}}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\omega_{max}}{2}\right)^3$$

nur für den genannten Sonderfall streng gilt, im allgemeinen Fall muß sie durch die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi_{max}}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\omega_{max}}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2$$

ersetzt werden, in der $\frac{r}{e} = \lambda$ gesetzt ist, und die für $\lambda = 0$ in die erste Formel übergeht.

Der Gang der Rechnung ist naturgemäß der gleiche, wie bei Herrn C. Schmidt; durch Elimination von $\alpha$ und $\varphi$ aus (2), (3), (4) ergibt sich zunächst:

$$n^2\sin^2\beta = \frac{\sin^2\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}. \qquad (I)$$

Diese Beziehung ist identisch mit der dort abgeleiteten, wenn wir $\sin s$ durch $\lambda$ ersetzen[1]). Die Bedingung, daß $\chi$ ein Maximum sein soll, liefert dann eine 2. Beziehung zwischen $\omega$ und $\beta$:

$$\frac{n^2}{2}\sin\beta\cos\beta = \frac{\sin\omega\cos\omega\,(1+\lambda^2) - 2\lambda\sin\omega\cos^2\omega + \lambda\sin^3\omega}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)^2}. \qquad (II)$$

Durch Division von (I) und (II) folgt die auch dort richtig angegebene Gleichung:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\omega\,(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)}{2\,[\cos\omega\,(1+\lambda^2) - \lambda\cos^2\omega - \lambda]}. \qquad (III)$$

Aus der Beziehung $\beta = \frac{\chi + \omega}{2}$ bzw. der entsprechenden Gleichung für:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$$

und ihrer Auflösung nach $\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}$ folgt dann aber die obige Gleichung:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \operatorname{tg}^3\frac{\omega}{2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2.$$

Daß die sich aus dieser Formel ergebenden Werte für die Winkel beträchtlich, für $n$ immerhin merklich von den nach der speziellen, nicht richtigen Formel berechneten unterscheiden, zeigt die folgende Gegenüberstellung:

$r = 9{,}2$,
$e = 77{,}5$,
$x = 26\frac{5}{8}^0 = 26^0\,37'\,30''$,

| $\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \operatorname{tg}^3\frac{\omega}{2}$ | $\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \operatorname{tg}^3\frac{\omega}{2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2$, |
|---|---|
| $\frac{\omega}{2} = 31^0\,44'\,15''$, | $\frac{\omega}{2} = 27^0\,48'\,53''$, |
| $\beta = 45^0\,3'$, | $\beta = 41^0\,7'\,38''$, |
| $\varphi = 6^0\,23'\,54''$ | $\varphi = 5^0\,59'\,43''$, |
| $\alpha = 69^0\,52'\,24''$ | $\alpha = 61^0\,37'\,29''$ |
| $n = 1{,}3267$. | $n = 1{,}3337$. |

1) J. Würschmidt, Über die Brennkugel, Monatsh. f. d. naturw. Unterr. **4**, 98—113, 1911.

1) Bei dem Klammerausdruck fehlt der Exponent 2, was offenbar ein Druckfehler ist.

Um die etwas langwierige Berechnung von $\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}$ aus dem Ausdruck (III) für $\operatorname{tg}\beta$ zu kontrollieren und zugleich zu vereinfachen, kann man gleich in (III) setzen:

$$\sin\omega = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$\cos\omega = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

wobei $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = x$. Man erhält so nach einigen Umformungen:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x\cdot[1+\mu^2x^2]}{1-\mu^2x^4}, \qquad \text{(IIIa)}$$

wobei $\mu = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ gesetzt ist. Dann folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \frac{\operatorname{tg}\beta - x}{1+x\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{x(1+\mu^2x^2) - x(1-\mu^2x^4)}{(1-\mu^2x^4)+x^2(1+\mu^2x^2)} =$$

$$= \frac{\mu^2x(x^2+x^4)}{1+x^2} = \mu^2x^3$$

und damit die obige Gleichung.

Der Versuch, $n$ direkt aus $\omega$ zu berechnen, führt zu einem ziemlich komplizierten Ausdruck, auf dessen Wiedergabe verzichtet sei; es empfiehlt sich deshalb die allmähliche Berechnung der Winkel $\beta$, $\varphi$, $\alpha$ und hieraus von $n$, wie vorgeschlagen. Für die Praxis wäre natürlich auch eine graphische Darstellung recht bequem, wobei es genügt, stets dasselbe $\lambda$ zu nehmen.

(Eingegangen 10. November 1922.)

## Radioaktive Zerfallsprodukte in der Atmosphäre und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne.

II. Mitteilung [1]).

Von Hermann Bongards.

(Mit Tafel I u. II.)

Über eine Reihe von Beobachtungen des Gehalts der Erdatmosphäre an radioaktiven Substanzen vom Jahre 1913 habe ich an verschiedenen Stellen [2]) berichtet. Infolge der ungünstigen Zeitverhältnisse konnten die dort verschiedentlich entworfenen Pläne für die Fortführung solcher Beobachtungen mittels genauerer Methoden noch nicht ausgeführt werden. Entgegen der allgemein herrschenden Annahme, daß die radioaktiven Stoffe in der Atmosphäre der Erdrinde entstammten, habe ich [1]) die Vermutung ausgesprochen, daß die in höheren Schichten der Atmosphäre nachgewiesenen Mengen namentlich der Radiumemanation in der Sonnenatmosphäre ihren Ursprung hätten. Es gelang mir damals nicht, von europäischen Observatorien photographische Aufnahmen der Sonne aus der in Frage kommenden Zeit zu bekommen. Erst neuerdings habe ich infolge des liebenswürdigen Entgegenkommens zweier amerikanischer Institute, des Mount Wilson Solar Observatory der Carnegie Institution und des Yerkes Observatory der Universität Chicago, eine Reihe von spektroheliographischen Aufnahmen der Sonnenoberfläche erhalten.

Es sind das Abbildungen aller derjenigen Stellen der Sonnenscheibe, welche die Kalziumlinie hell zeigen, d. h. Bilder, auf denen man nur den glühenden Kalziumdampf in der Sonnenatmosphäre sieht. Es ist fraglich, ob diese Kalziumwolken mit den Fackeln identisch sind oder nicht. Als sicher hat es sich herausgestellt, daß im allgemeinen die Kalziumwolken sich da befinden, wo Fackeln sind, und auch mit letzteren in ihrer Form sehr nahe übereinstimmen. Es scheint aber so, als wenn sich die leuchtenden Kalziumdämpfe zuweilen auch an Stellen zeigten, die frei von eigentlichen Fackeln sind. Hale hält die absolute Identität nicht für sicher und hat daher für die leuchtenden Wolken, Fleckchen und Adern, die seine Aufnahmen ergaben, den Namen Kalziumflocken eingeführt [2]).

Beim Yerkes Observatorium waren nur 5 Aufnahmen aus dem in Frage kommenden Abschnitt des Jahres 1913 vorhanden, nämlich vom 24. u. 27. Sept. je eine, vom 3. Okt. zwei und vom 11. Dez. eine. Dagegen waren beim Mount Wilson Observatorium Aufnahmen in solcher Zahl vorhanden, daß mir nur eine Auswahl kopiert werden konnte. Ich erhielt 15 Bilder vom 12.—16., 26., 27., 30. Sept., 2., 20. bis 23. Okt., 5. u. 7. Nov. 1913. Die ganze Beobachtungsperiode fällt in eine Zeit sehr geringer Sonnentätigkeit (Fleckenminimum zur Epoche 1913,6). Demgemäß waren größere Flockengebiete, die von der ziemlich einförmigen Fläche sich abhoben und längere Zeit

1) Vgl. diese Zeitschr. **21**, 141, 1920.

2) Die Arbeiten d. Kgl. Preuß. Aeron. Observ. Lindenberg im Jahre 1913, IX, 411, 1914; Meteorol. Zeitschr. **31**, 189, 1914; Meteorol. Zeitschr. **36**, 339, 1919; Umschau **19**, 348, 1915; Scientif. Amer. Suppl. 15. Jan. 1916; diese Zeitschr. **21**, 141, 1920.

1) Vgl. diese Zeitschr. **21**, 141, 1920.

2) Scheiner-Graff, Astrophysik. Leipzig 1922.

erhielten, auf den vorliegenden Aufnahmen kaum, Flecken überhaupt nicht zu erkennen. Nur auf einer Aufnahme des Yerkes Observatoriums vom 11. Dez. zeigen sich auf dem nördlichen Teil der Sonnenscheibe zwei auffallende Störungsgebiete, doch reichen die Beobachtungen des Emanationsgehalts nur bis zum 4. Dez., so daß ein Vergleich nicht möglich ist.

In vier Aufnahmen des Mount Wilson Observatoriums aus der Zeit zwischen dem 26. Sept. und 2. Okt. zeigt sich ein Gebilde von Kalziumflocken, das während seiner scheinbaren Wanderung über die Sonnenscheibe in einer Folge von Tagen immer wiederzuerkennen ist. Eine Reproduktion der vier in Frage kommenden Aufnahmen ist beigefügt. Am 26. Sept. ist am äußersten Ostrande der Sonne ein Gebiet hellerer Flocken sichtbar, das am folgenden Tage in seiner Struktur deutlicher zu erkennen ist. Eine spiralige Anordnung einzelner Flockengebilde fällt besonders ins Auge. Leider fehlen bei den Aufnahmen von Mount Wilson Angaben über die Himmelsrichtung und die Lage der Sonnenpole. Aus einer fast gleichzeitigen Aufnahme von Yerkes vom 27. Sept., auf der die Himmelsrichtungen angegeben waren, konnten dieselben auch für die Mount Wilson-Bilder ermittelt werden. Die Äquatorebene der Sonne scheint zu dieser Zeit etwa 7° im Sinne des Uhrzeigers gegen die auf manchen Bildern markierte Mittellinie geneigt zu sein. Das Störungsgebiet liegt also offenbar in nächster Nähe des Sonnenäquators. Am 30. Sept. befindet sich die Gruppe fast in der Mitte der Sonnenscheibe. Die Aufnahme an diesem Tage ist — wohl infolge atmosphärischer Trübung — weniger deutlich. Vom 29. Sept. und 1. Okt. waren Aufnahmen nicht vorhanden — vermutlich infolge zu starker Bewölkung. Die Aufnahme vom 2. Okt. zeigt die Flockengruppe auf der westlichen Sonnenhälfte etwas südlich der (hier nicht markierten) Mittellinie. Auf einer hier nicht wiedergegebenen Aufnahme von Yerkes vom 3. Okt. ist die Gruppe ebenfalls noch deutlich zu erkennen.

Ziehen wir nun die Beobachtungen des Radium-Emanationsgehalts der Luft bis zu etwa 2500 m Höhe zum Vergleich heran, die in der gleichen Zeit im Jahre 1913 in Lindenberg angestellt worden sind, und deren Ergebnisse ich in der ersten Mitteilung[1]) graphisch dargestellt habe! Den zahlenmäßigen Verlauf des Emanationsgehalts in statischen Einheiten des gemessenen Sättigungsstroms pro cm² gibt für die in Frage kommenden Tage die folgende Tabelle:

| Tag | Beobachtungszeit | Sättigungsstrom st. E. |
|---|---|---|
| Sept. 25. | 6,43—9,21 a. m. | $5{,}05 \cdot 10^{-6}$ |
| „ 26. | 6,35—8,46 „ | 6,78 „ |
| „ 27. | 6,36—9,32 „ | 6,78 „ |
| „ 27. | 1,55—4,17 p. m. | 6,78 „ |
| „ 28. | keine Beobachtung | |
| „ 29. | 6,38—9,21 a. m. | 15,24 „ |
| „ 30. | 6,48—9,15 „ | 22,30 „ |
| Okt. 1. | 6,52—9,28 „ | 12,34 „ |
| „ 2. | 9,57—10,22 „ | 8,81 „ |

Wir sehen hier ein recht ausgeprägtes Maximum am 30. Sept., d. h. an dem Tage, an dem die Kalziumflockengruppe sich etwa in der Mitte der Sonnenscheibe befindet. Wenn man unter der obigen Annahme einer Neigung der Äquatorebene gegen die Mittellinie um 7° ein Gradnetz auf der Sonnenscheibe entwirft, so liegt der Westrand des Störungsgebietes am 26. Sept. $7^h{,}22$ P.S.T. (Pacific Standard Time) bei etwa 56° östlich vom Mittelmeridian der Sonnenscheibe, etwa 4° nördlich vom Äquator; am 2. Okt. $7^h{,}35$ P.S.T. liegt der Westrand des auf diesem Bilde erkennbaren Flockengebietes bei etwa 24° westlicher heliozentrischer Länge. Das Störungsgebiet hat also in 6 Tagen 80° zurückgelegt. Das entspricht einer synodischen Umlaufzeit von 27 Tagen, einer siderischen von 25 Tagen, stimmt also recht gut mit der Rotationsdauer überein, die die bisherigen Beobachtungen für die äquatornahen Breiten der Sonne ergeben haben. An der Identität der betrachteten Störungsgebiete an den verschiedenen Tagen ist also trotz des Fehlens von Aufnahmen an mehreren Tagen nicht zu zweifeln. Der Westrand des Störungsgebietes muß nach dieser Rechnung den Mittelmeridian der Sonnenscheibe am 30. Sept. passieren. Die Beobachtung des Maximums des Emanationsgehalts bezieht sich ebenfalls auf den 30. Sept. Die zeitliche Übereinstimmung ist also ausgezeichnet.

Maxima des Emanationsgehalts an anderen Tagen, von denen Kalziumflockenbilder mir zugänglich waren, fallen auf den 15. Sept. und 22. Okt. In der Nähe dieser beiden Tage sind besonders auffällige Flockengruppen, die sich längere Zeit in so wenig veränderter Form erhalten, daß ihre Identität einwandfrei festzustellen wäre, nicht vorhanden. Insbesondere ist das am 22. Okt. nicht der Fall, an dem das absolute Maximum des Emanationsgehalts mit $25 \cdot 10^{-6}$ st. E. des Sättigungsstroms pro cm² gemessen wurde. Allerdings schießt dieses Maximum so steil aus den nahe dem Mittelwerte liegenden Werten der Nachbartage

1) Diese Zeitschr. 21, 141, 1920.

empor, daß man sehr wohl vermuten kann, daß, wenn es in Zusammenhang mit einer Erscheinung an der Sonnenoberfläche steht, diese Erscheinung von kurzer Dauer gewesen sein muß. Vom 6. November, an dem ein abnorm tiefes Minimum des Emanationsgehalts beobachtet wurde ($0{,}54 \cdot 10^{-6}$ st. E.), war keine Aufnahme vorhanden.

Wenn also dieser eine Fall vom 30. Sept. auch nicht als beweisend für den Zusammenhang des Emanationsgehalts der Atmosphäre mit Erscheinungen auf der Sonne gelten kann, so wird doch der Grad der Wahrscheinlichkeit dieser aus allerlei Anzeichen vermuteten Beziehung wesentlich erhöht. Die im Jahre 1913 verwendeten Beobachtungsmethoden hatten nur den Charakter von Vorversuchen. Der Krieg unterbrach den Ausbau dieser Versuche und erst bei der Bearbeitung im Jahre 1919 drängte sich mir die Vermutung auf, daß die Emanationsmengen, die in größeren Höhen der Atmosphäre beobachtet werden, kosmischen Ursprungs wären. Leider ist es mir seither infolge der Ungunst der Zeiten noch nicht gelungen, weitere Beobachtungen auf Grund exakter Methoden anzustellen. Die Schwierigkeiten methodischer Art sind nicht derart, daß sie nicht zu meistern wären. Im Flugzeug hat sich inzwischen ein ideales Mittel für derartige Untersuchungen in größeren Höhen entwickelt und seine Verwendbarkeit für aerologische Beobachtungen einwandfrei erwiesen. Die schon bekannten und am Erdboden erprobten Meßmethoden des Emanationsgehaltes — einerseits durch Absorption der Emanation in Kokosnußkohle, andererseits durch Mengenbestimmung ihrer elektrisch geladenen Zerfallsprodukte — lassen sich unschwer der Beobachtung im Flugzeug[1]) anpassen.

Eine Reihe solcher Höhenbeobachtungen in Verbindung mit gleichzeitigen spektroheliographischen Aufnahmen der Sonne dürfte wohl imstande sein, die Frage zu entscheiden, ob ein Zusammenhang zwischen Emanationsgehalt der Atmosphäre und solaren Erscheinungen besteht.

Wenn bisher nur von Aufnahmen im Licht der Kalziumlinien die Rede war, so hat das seinen Grund nicht darin, daß diese Linien etwa für die vorliegenden Untersuchungen am geeignetsten waren. Der Grund ist lediglich der, daß Aufnahmen mit diesen Linien des Sonnenspektrums bei weitem am häufigsten gemacht werden. Eine wesentlich deutlichere Beziehung dürfte sich ergeben, wenn man etwa die Spektroheliogramme im Lichte einer Heliumlinie aufnähme. Heliumkerne werden als α-Strahlen von der Mehrzahl der radioaktiven Elemente gebildet, und wo Radium und seine Zerfallsprodukte auftreten, wird immer Helium nachzuweisen sein. Die Wahl der geeignetsten Linie wird aber wohl in der Hauptsache von der Technik spektroheliographischer Aufnahmen abhängig zu machen sein.

Es ist allerdings nicht zu erwarten, daß derartige Parallelbeobachtungen atmosphärischer Radioaktivität und solarer Erscheinungen imstande sind, den einwandfreien Nachweis einer Korpuskularstrahlung zu erbringen, zumal es wohl nicht angeht, die Emanationsmessungen in Höhen auszuführen, die jede Möglichkeit einer Herkunft der Emanation vom Boden ausschließt. Der exakte Nachweis wird wohl nur durch Messung der Strahlungsenergie möglich sein. Zu diesem Zwecke wären noch neue, empfindliche Methoden auszuarbeiten zum Nachweis einer korpuskularen Strahlung, deren Träger keine elektrische Ladung besitzen. Denn wenn auch die Atomkerne an ihrem Ursprungsort elektrisch geladen sind und einem elektrischen Feld ihre Geschwindigkeit verdanken, so zeigen doch die Untersuchungen an Kanalstrahlen, daß im Gegensatz zu Elektronenstrahlen die Atomstrahlen die Eigenschaft besitzen, unter gewissen Bedingungen ihre anfangs positive Ladung zu neutralisieren oder gar sie in negative zu verwandeln. Bei elektrisch neutralen Korpuskeln versagen die empfindlichen elektrischen Methoden des Nachweises, über die wir verfügen. Vielleicht sind aber derartige Korpuskularstrahlen mit pyrheliometrischen und bolometrischen Methoden nachzuweisen. Dazu wäre es allerdings notwendig, einige Voraussetzungen fallen zu lassen, die bisher scheinbar immer noch gemacht werden, wie ich der zusammenfassenden Darstellung von Dorno[1]) entnehme, in der er[2]) ausführt: „Um nicht nur die Energieverteilung, sondern auch die Energie jedes beliebigen Spektralteils in absolutem Maß festzustellen, bedarf es der gleichzeitigen Messung der Gesamtenergie nach der pyrheliometrischen Methode, und der Gleichsetzung der nach ihr erhaltenen Anzahl Grammkalorien pro Minute und Quadratzentimeter mit der von der gesamten Energiekurve umschriebenen Fläche." Dieses Verfahren setzt voraus, daß korpuskulare Strahlungsenergie an der pyrheliometrisch gemesse-

1) Meteorol. Zeitschr. **36**, 339, 1919.

1) Dorno, C., Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung. Braunschweig 1919.

2) a. a. O. S. 12.

nen Gesamtenergie keinen Anteil hat. Vielleicht gelingt der Nachweis korpuskularer Strahlung, wenn man diese Voraussetzung aufgibt. Ich möchte fast vermuten, daß die Diskrepanz zwischen den Angaben des Ångströmschen Kompensationspyrheliometers und denen des Abbotschen Water-flow-Pyrheliometers nicht allein dem von Dorno[1]) angeführten Grunde zuzuschreiben ist, sondern daß auch das verschiedene Absorptionsvermögen beider Apparate für korpuskulare Strahlung dabei eine Rolle spielt.

An der Tatsache, daß die Sonne korpuskulare Strahlung aussendet, besteht ja wohl heute kein Zweifel mehr. Dagegen ist die Frage, ob es sich um negative oder positive Strahlen handelt, noch ebensowenig geklärt, wie ihre Reichweite in der Atmosphäre. Die Möglichkeit, daß Korpuskularstrahlen, deren Träger Atomkerne oder Atome sind, auch in die unteren Schichten der Atmosphäre eindringen können, ist jedenfalls nicht ohne weiteres von der Hand zu weisen. In bezug auf die Theorie des Polarlichts berechnet R. Swinne[2]) die Höhen in der Atmosphäre, bis zu der α-Strahlen bei senkrechtem Einfall vordringen können, und findet einen Wert von etwa 200 km über der Erdoberfläche; für Wasserstoffatomkerne, die durch den Aufprall der α-Teilchen in Bewegung gesetzt werden, berechnet er eine Reichweite bis zu 80 km Höhe. Nimmt man an, daß Emanationsteilchen von einer mehr als 55 mal so großen Masse und gleicher Ladung wie ein α-Teilchen von der Sonne mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit ausgeschleudert werden, so ergibt eine rohe Überschlagsrechnung Reichweiten bis etwa 50 km. Teilchen, die auf dem Wege Sonne—Erde ihre Ladung neutralisiert haben, würden noch wesentlich tiefer in die Atmosphäre eindringen können, und die durch Atomzertrümmerung ausgelöste Sekundärstrahlung würde wohl auch noch bis zur Erdoberfläche durchdringen können. Man wird also auch bei Messung der Strahlungsenergie am Boden nicht ohne weiteres annehmen dürfen, daß korpuskulare Strahlung keinen Anteil daran hat.

Die Bedeutung eines Nachweises des solaren Ursprungs radioaktiver Stoffe in der Erdatmosphäre kann nicht leicht überschätzt werden. Fragen der Luft- und Gewitterelektrizität können auf diesem Wege klargestellt werden. Die Zunahme der durchdringenden Strahlung mit der Höhe von etwa 3000 m ab, die einwandfrei festgestellt ist, läßt sich zwanglos erklären, wenn in größeren Höhen ein stärkerer Emanationsgehalt festgestellt wird, ohne daß man, etwa mit A. Gockel[1]) ein in der Atmosphäre enthaltenes, bis jetzt unbekanntes, sehr leichtes radioaktives Gas annehmen müßte, dessen Existenz schon aus dem Grunde sehr unwahrscheinlich ist, weil allen bekannten radioaktiven Elementen ein recht hohes Atomgewicht zukommt. Für die Theorie der Ausbreitung elektrischer Wellen lassen solche Messungen Ergebnisse erwarten, die der radiotelegraphischen Praxis — auch durch die Feststellung der Ursachen atmosphärischer Störungen — unmittelbar nützen können. Die enge Beziehung des Emanationsgehalts zu Luftdruckänderungen, die als sichergestellt gelten kann, und die Bedeutung der Zerfallsprodukte der Emanation als Kondensationskerne versprechen einen nicht unerheblichen Fortschritt in der aerophysikalischen Erkenntnis und einen unmittelbaren Nutzen für die Wettervorhersage. Für die Erforschung der Vorgänge auf der Sonne endlich wird es nicht ohne Bedeutung sein, wenn man dabei die empfindlichsten Methoden anwenden kann, die wir zum Nachweis einer Substanz in der Physik kennen, um Beziehungen irdischer Erscheinungen zu solaren Vorgängen festzustellen.

1) Dorno, a. a. O. S. 29.
2) Swinne, diese Zeitschr. **17**, 531, 1916.

1) Diese Zeitschr. **16**, 345—352, 1915.

Hamburg-Großborstel, den 29. November 1922.

(Eingegangen 1. Dezember 1922.)

## Über die scheinbare Frequenzabhängigkeit des elektrischen Elementarquantums bei Schroteffektmessungen.

(Bemerkung zu dem physiologischen Deutungsversuch von R. Fürth.)

Von W. Schottky.

Wie schon in der Leipziger Diskussion bemerkt (diese Zeitschr. **23**, 438, 1922), erschien mir der interessante von Herrn Fürth unternommene Versuch (diese Zeitschr. **23**, 354, 1922), die starken von uns beobachteten scheinbaren Schwankungen des Elementarquantums mit der Frequenz auf physiologische Ursachen zurückzuführen, deshalb wenig aussichtsreich, weil wir in Wirklichkeit weit oberhalb der Hörschwelle des Telephons gearbeitet haben, während Herr Fürth, um die Größenordnung der Schwankungen durch eine Frequenzabhängigkeit der Hörschwelle des benutzten Telephons erklären zu können, von der Annahme ausgehen mußte, daß die abgehörte

Amplitude im Mittel nur etwa das 4fache der Schwellenamplitude betrug.

Im Anschluß an die Diskussionserwiderung von Herrn Fürth, der feststellte, daß der physiologische Effekt in großer Entfernung von der Reizschwelle keineswegs verschwindet, möchte ich hier zur weiteren Klärung der Angelegenheit kurz das vorläufige Ergebnis einer inzwischen erfolgten brieflichen Diskussion mitteilen. Danach hat Herr Fürth recht, wenn er die Notwendigkeit einer wichtigen systematischen frequenzunabhängigen physiologischen Korrektion auch in beliebig großer Entfernung von der Reizschwelle behauptet; andererseits bestätigt sich aber meine Vermutung, daß die Möglichkeit einer Erklärung der Frequenzschwankungen des scheinbaren Elementarquantums auf Grund einer Frequenzabhängigkeit der Hörschwelle tatsächlich an die Annahme gebunden ist, daß man nicht zu weit von der Hörschwelle des Telephons entfernt arbeitet. Nun haben wir einen 200 Ω-Hörer benutzt und hatten[1]) am ersten Gitter unserer Vierfachkaskade, wie sich durch Vergleich mit der Normaltonquelle ergab, Spannungen von etwa $3 \cdot 10^{-6}$ Volt. Die Verstärkung pro Röhre liegt bei beiden benutzten Verstärkerkaskaden für alle Frequenzen und Röhren zwischen 7 und 12, wir hatten also am Gitter der letzten Röhre mindestens (effektive) Spannungsamplituden von $7^3 \cdot 3 \cdot 10^{-6}$ Volt. Zu einer solchen Gitteramplitude gehört bei Röhren der benutzten Type (*A*-Rohr) bei einem Widerstand von 600 Ω an der Ausgangsseite (entsprechend der ungefähren Impedanz des benutzten Hörers) eine Spannungsschwankung von der 0,2- bis 0,3fachen Größe der Gitterschwankung. Die Spannungsschwankung $V$ am Hörer wird also für den Vergleichston:

$$V > 0{,}2 \cdot 7^3 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 68{,}6 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = \\ = \text{ca. } 2 \cdot 10^{-4} \text{ Volt.}$$

Um den Fürthschen Erklärungsversuch zu rechtfertigen, hätten wir, unter Benutzung eines 4780 Ω-Hörers, beispielsweise bei $\omega = 4000$ etwa $3{,}4 \cdot 10^{-6}$ Volt haben müssen, da Herr Fürth die Reizschwelle $V_0$ eines solchen Hörers bei $1{,}8 \cdot 10^{-6}$ Volt[2]) findet und das Verhältnis $\frac{V}{V_0} = 1{,}8$ angenommen hat[3]). Nimmt man die Impedanz eines 4780 Ω-Hörers zu etwa 8000 Ω an, so ergibt sich als Verhältnis der unserem Telephon wirklich zugeführten zu der von Herrn Fürth geforderten Leistung in diesem Falle der Betrag

$$\frac{(2 \cdot 10^{-4})^2}{600} : \frac{(3{,}4 \cdot 10^{-6})^2}{8000} = 6{,}7 \cdot 10^{-11} : \\ : 1{,}4 \cdot 10^{-15} = 48\,000 : 1.$$

Nimmt man die Hörer in ihrem mechanischen Teil als ungefähr gleichwertig an, so würde daraus folgen, daß die von uns abgehörten Schallenergien über 40 000 mal größer waren als Herr Fürth angenommen hat. In den Amplituden gibt das etwa das Verhältnis 200 : 1, und im Verhältnis von beobachteten Amplituden zu Schwellenamplituden das Verhältnis 400 : 1 statt 2 : 1, womit wohl der Schluß auf eine nichtphysiologische Ursache der beobachteten Schwankungen seine Bestätigung findet.

Abgesehen von dieser Rechnung zeigt übrigens schon der subjektive akustische Befund, daß wir uns weit über der Reizschwelle befunden haben. Der Vergleichston und der Schroteffektton waren noch hörbar, wenn man im Zimmer — also keineswegs akustisch geschützt — den Hörer weit vom Ohr entfernt hielt, während die Fürthschen Reizschwellenuntersuchungen in geschlossener Kabine, mit ausgeruhtem Ohr, angestellt wurden.

Im übrigen sei bei der Gelegenheit noch bemerkt, daß meine letzte Annalenveröffentlichung („Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes". Ann. d. Phys. **68**, 174, 1922) die Korrektur der Rechnungen meiner ersten Arbeit (Ann. d. Phys. **57**, 541, 1918) nunmehr wohl vollständig und richtig enthält und daß auch die Fig. 2 von Herrn Fürth (diese Zeitschr. **23**, 356, 1922) dementsprechend zu verbessern ist. (Vgl. diese Zeitschr. **23**, 432, 1922.)

## Zusammenfassung.

Die subjektiv akustische Vergleichsmeßmethode des Schroteffektes, sofern sie zu mehr als größenordnungsmäßigen Feststellungen brauchbar ist und herangezogen werden soll, verlangt eine physiologische Korrektion, die unter der Annahme, daß der Mittelwert des Reizes gemessen wird, von R. Fürth berechnet ist und das bisher errechnete scheinbare Elementarquantum für alle Frequenzen vergrößern würde. Zur Erklärung der beobachteten starken Frequenzabhängigkeit des scheinbaren Elementarquantums erscheint diese Theorie jedoch nicht geeignet,

1) C. A. Hartmann, Ann. d. Phys. **65**, 71, 1921.

2) Nach freundlicher Mitteilung von Herrn Fürth sind in seiner Fig. 5 (S. 360 a. a. O.) die Ordinaten in $10^{-6}$ Volt angegeben.

3) Dies ist allerdings der kleinste vorkommende Wert dieses Verhältnisses. Einigermaßen merkliche Beeinflussungen durch $V_0$ finden noch bis $\frac{V}{V_0} \sim 8$ statt.

da sie ca. 100 mal zu kleine Tonintensitäten voraussetzt. Der beobachtete Frequenzgang scheint also doch eine physikalische Ursache zu haben; objektive Vergleichsmessungen sind zur weiteren Klärung der Frage anzustreben.

(Eingegangen 6. Dezember 1922.)

# BESPRECHUNGEN.

**W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie.** I. Elementare Differentialgeometrie. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. I). gr. 8°. X u. 230 S. Mit 38 Textfig. Berlin, Julius Springer. 1921. Geh. M. 69.—, gebunden M. 81.—

Die moderne Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie hat die Differentialgeometrie sehr viel mehr als früher in den Interessenkreis des theoretischen Physikers hineingezogen; schließen sich doch ihre Begriffsbildungen aufs engste an die in dieser mathematischen Disziplin entwickelten Ideen an und ordnen sich ihnen bei hinreichend allgemeiner Auffassung geradezu ein. Wir haben in der mathematischen Literatur bisher kein Lehr- oder Handbuch, das dem Bedürfnis des Physikers nach Orientierung mit diesem Endziel entgegenkommt, und man wird daher auch von physikalischer Seite her das Erscheinen der Blaschkeschen Vorlesungen über Differentialgeometrie begrüßen, die, wie ihr Titel zeigt, auch dieses moderne Interesse berücksichtigen wollen.

Der zunächst vorliegende erste Band behandelt die elementare Differentialgeometrie. Man findet hier also in erster Linie eine Darstellung der Theorie der Kurven (Kap. I) und Flächen (Kap. III) im dreidimensionalen Raume sowie der Gaußschen Geometrie auf einer Fläche als Lehre von den „inneren" Maßverhältnissen der Fläche, unabhängig von denen des umgebenden Raumes (Kap. IV). Die Darstellung folgt naturgemäß im wesentlichen den klassischen Wegen; der physikalisch vorgebildete Leser wird wohl angenehm empfinden, daß in Worten wie Formeln die Vektorsprache konsequent verwendet wird. Das Charakteristische dieses Bandes aber ist, daß neben diesen, in älteren Lehrbüchern fast ausschließlich zur Geltung kommenden Fragen der „Differentialgeometrie im Kleinen" ein ganz wesentlicher Teil Problemen der „Differentialgeometrie im Großen" gewidmet ist; hierunter versteht man Eigenschaften geometrischer Figuren in ihrer ganzen von vornherein gegebenen Ausdehnung, während jene Aussagen (z. B. die der Krümmungstheorie) sich nur auf hinreichend klein begrenzte Stücke von Kurven und Flächen beziehen. Solche Probleme „im Großen", zum Teil schon sehr alten Fragestellungen entspringend, haben in neuerer Zeit die Mathematiker vielfach beschäftigt, da sie methodisch, wie in ihren Resultaten von großem Reiz sind; manche dürften auch vom Standpunkte der Anwendungen von Interesse sein. Hierhin gehört z. B. der Satz von der Starrheit der Kugelfläche als Ganzes (die ganze Kugelfläche kann nicht stetig und längentreu auf eine andere singularitätenfreie geschlossene Fläche abgebildet werden) und ähnliche Sätze für geschlossene konvexe Flächen (Eiflächen), die man nebst einer Auswahl weiterer interessanter Probleme dieser Art in Kap. V findet. Ferner gehört zum Teil dahin die große Gruppe der Extremumsaufgaben der Kurven- und Flächentheorie, die in Kap. II und VI eingehend behandelt ist; es sei nur auf das Isoperimeterproblem bei Kreis und Kugel, Sätze über Raumkurven konstanter Krümmung, die berühmten Probleme über Minimalflächen hingewiesen. Den Schluß des Bandes (Kap. VII) bildet ein Abriß der Liniengeometrie, die auf Grund von Studys Übertragungsprinzip (Abbildung der Geraden des Raumes auf Punktepaare der Kugel unter Verwendung eines Kalkuls mit komplexen Vektoren) dargestellt wird.

Es ist hier nicht der Ort, näher auf den reichen mathematischen Inhalt des Bandes einzugehen, der auf der Höhe der modernen Forschung des Faches steht. Hervorzuheben ist, daß es auch dem Nichtfachmann eine sehr anregende und verständliche Einführung und einen weitgehenden Überblick zu bieten geeignet ist; an manchen Stellen freilich möchte man zu diesem Ende eine weniger weit getriebene Knappheit der Darstellung wünschen. Die vielfach eingestreuten literarischen Nachweise und historischen Notizen sind sehr zu begrüßen; nur findet sich in historischen Stimmungsbildern und Bemerkungen zu Bezeichnungen und Namen mitunter eine für die Schilderung des mathematischen Milieus nicht erforderliche Weitschweifigkeit, die von jener Knappheit im mathematischen Teil sehr abweicht.

Besonders hervorgehoben seien noch die sehr wertvollen Zusammenstellungen von Aufgaben und über das behandelte Material hinausgehenden Lehrsätzen am Schluß der einzelnen Kapitel.

Das Buch stellt, von der Verlagsbuchhandlung aufs sorgfältigste ausgestattet, einen vielversprechenden Anfang einer neuen von R. Courant gemeinsam mit Blaschke, Born, Runge herausgegebenen Sammlung dar, die die einzelnen mathematischen Disziplinen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen behandeln will. E. Hellinger.

**K. Graff, Astrophysik.** Dritte völlig neubearbeitete Auflage von J. Scheiner. Populäre Astrophysik, von Prof. Dr. K. Graff. 8°. VIII u. 459 S. Mit 17 Tafeln u. 254 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1922. Geheftet M. 125.—, geb. M. 145.—

Mit der Neubearbeitung der bekannten Scheinerschen populären Astrophysik hat sich Herr Prof. Graff unzweifelhaft ein großes Verdienst erworben. In dem letzten Dezennium hatten sich mit den großen Umwälzungen in der Physik die Ziele und Arbeitsmethoden der Astrophysik so stark geändert und die erlangten Resultate so gehäuft, daß sich auch bei den Fachleuten das Fehlen einer zusammenhängenden Darstellung stark fühlbar machte. Die Scheinersche

Astrophysik war bewußt nur für den gebildeten Laien geschrieben und war dadurch von Anfang an in einen zu großen Abstand von der sich rasch weiter entwickelnden Wissenschaft geraten. Die neue Graffsche Ausgabe will nicht mehr populär im gewöhnlichen Sinne des Wortes sein. Dabei vermeidet sie es doch, ein nur dem Fachmanne verständliches Werk zu bilden, so daß es jeder Liebhaber der Astronomie und jeder Physiker mit Erfolg benutzen wird. Da jetzt öfters als früher in dem Verhältnisse zwischen Astronomie und Physik die erstere der gebende Teil ist, werden die Physiker häufig gezwungen sein, zu vorliegendem Bande zu greifen.

Das Buch zerfällt in 2 Hauptteile: „Die astrophysikalischen Forschungsmethoden", in dem die physikalischen und physiologischen Grundlagen, die Spektralanalyse, die Photometrie, die Himmelsphotographie besprochen werden, und: „Die Ergebnisse der astrophysikalischen Forschung", die Sonne, die Planeten, Monde und Kometen und endlich die Fixsterne, Nebelflecke und Sternhaufen behandelnd. Ein ausführliches Eingehen auf die einzelnen Abschnitte verbietet der Raum. Die Darstellung ist durchweg klar und gibt da, wo sie nicht erschöpfend sein kann durch Literaturnachweise, die vielleicht stellenweise reichlicher hätten sein können, die Möglichkeit, sich leicht weiter zu unterrichten. Die enge Verknüpfung zwischen Astrometrie und Astrophysik zeigt sich fast in jedem Abschnitte und wenn gelegentlich auch rein astrometrische Fragen mitbehandelt werden (wie z. B. das Ausmessen von Sternorten aus Sternaufnahmen) so ist dies kein Fehler. Daß die vorliegende mit vielen guten Illustrationen versehene Neubearbeitung auf 459 statt auf 718 Seiten wie die erste Auflage ihren wesentlich reicheren Inhalt darbietet, mag auch als Erfolg des Herausgebers und des Verlages erwähnt werden.

B. Meyermann.

**Le Vicomte Haldane, Le Règne de la Relativité.** Traduction française par H. de Varigny. gr. 8°. XXVI et 590 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1922. Broché fr. 30.—.

In dem in französischer Übersetzung vorliegenden Werke beschäftigt sich Lord Haldane, der englische Staatsmann, der bekanntlich zugleich auch ein Gelehrter von Ruf ist, vom philosophischen Standpunkte aus mit dem Prinzip der Relativität. Er faßt dasselbe hier in einem sehr allgemeinen Sinne auf, so daß das physikalische Relativitätsprinzip lediglich einen allerdings sehr bedeutsamen Sonderfall darstellt. Indem der Verfasser nämlich allgemein die Relativität der Wirklichkeit in bezug auf die Art der Erkenntnis betrachtet, findet er die so verstandene Relativität in mannigfaltigster Weise auf den Gebieten der Kunst, der Wissenschaft, des rechtlichen, staatlichen und religiösen Lebens wieder. So ist denn der größte Teil des Buches allgemeinen philosophischen Erörterungen gewidmet, und nur im ersten Teile (S. 45—203) wird auch die physikalische Relativität behandelt. Die Darstellung derselben erfolgt ohne irgendwelche Benützung der mathematischen Formelsprache und gibt nur in andeutender Weise die wichtigsten Grundgedanken wieder. Diesen physikalischen Abschnitt hat der Verfasser, wie er mitteilt, in der für die Übersetzung benutzten dritten englischen Auflage, die Mitte 1921 nur wenige Monate nach der ersten erschienen ist, auf Grund von Unterredungen weitgehend geändert, die er inzwischen mit Einstein selbst in London gehabt hatte. Doch braucht Lord Haldane trotzdem, wie er selbst hervorhebt, seine eigene Ausdrucksweise, nicht diejenige Einsteins. Obwohl das Buch also nicht als ein physikalisches Werk angesehen werden kann, wird es auch für den Physiker von Interesse sein.

F. Jüttner.

**K. Bangert, Maße und Maßsysteme mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik.** gr. 8°. 110 S. Leipzig u. Frankfurt a. M., Kesselringsche Hofbuchhandlung (E. v. Mayer). 1922. Pappband M. 22.50.

Das vorliegende Buch befaßt sich mit der Ableitung und der eingehenden Behandlung der Dimensionen einer umfassenden Zahl von physikalischen Begriffen. Der gesamte Stoff wird zerlegt in die Grundeinheiten der Mechanik, in die elektrischen und magnetischen Masse, in die beleuchtungstechnischen Einheiten und die radioaktiven Maße. Außerdem ist ein Abschnitt, welcher andere als die gebräuchlichen Maßsysteme behandelt, eingeschoben.

Der Verf. hat besonderen Wert darauf gelegt, den Überblick über die Zusammenhänge der Maßsysteme durch die knappe Herleitung der wichtigsten physikalischen und chemischen Gesetzmäßigkeiten zu ermöglichen. Tabellen und Zahlenbeispiele, wie die Aufführung der wichtigsten Literaturzitate, machen das Buch nicht nur für Lehrzwecke, sondern auch besonders zum praktischen Gebrauch geeignet. Diese Vorzüge werden unterstützt durch den geringen Umfang und die inhaltsreiche kurzgefaßte Form der Darstellung, welche das Nachschlagen in umfangreichen Lehrbüchern und Kompendien erspart.

A. Goetz.

**P. Gruner, Leitfaden der geometrischen Optik.** 4°. 148 S. Mit 100 Fig. Bern, Paul Haupt. 1921. M. 24.—

Das Buch ist als Einführung in das Gebiet der geometrischen Optik gedacht. Es will in gedrängter Form, leicht verständlich, doch in exakt wissenschaftlicher Weise eine solide Grundlage zum Verständnis der optischen Instrumente geben, ohne auf weitläufige Einzelfragen einzutreten.

Nach kurzen Ausführungen zum Brechungsgesetz wird die Geometrie des zentrischen Linsensystems gründlich behandelt. In einem Abschnitt über die physikalische Verwirklichung der optischen Abbildung sind die Linsenfehler besprochen. Die photometrischen Gesetze bei der optischen Abbildung, dann der Einfluß der Blenden auf Schärfe und Tiefe des Bildes sind ausführlich dargestellt.

Eine knappe Darstellung der Wellenlehre des Lichtes, der Interferenz und Beugung führt zum Begriff des Auflösungsvermögens.

Im letzten Drittel des Buches werden die optischen Instrumente (unter anderm Brille, photographisches Objektiv, Fernrohr und Mikroskop) rechnerisch behandelt.

Das Buch ist zum Studium, namentlich solchen Studierenden, die sich auf den Geometer- oder Ingenieurberuf vorbereiten, sehr zu empfehlen.

P. Scherrer.

**M. v. Laue, Das physikalische Weltbild.** 8°. 25 S. Karlsruhe i. B., Druck und Verlag C. F. Müllersche Hofbuchhandlung m. b. H. 1921. M. 4.80.

Die kleine Schrift stellt den Abdruck eines Vortrages dar, den der Verfasser auf der Kieler Herbst-

woche 1911 gehalten hat. Nach kurzem Überblick über die durch Einsteins Lehre geschaffenen Umwälzungen in unseren Anschauungen über die Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik geht der Vortragende näher ein auf die großen Erfolge der Atomphysik im Zusammenhange mit dem Bohrschen Atommodell. Die Darstellung bleibt auch dort, wo Einzelergebnisse der Forschung besprochen werden, so klar und leicht verständlich, daß jeder, der einen ganz kurzen Einblick in die Probleme der modernen Physik tun will, in dieser Schrift das findet, was er sucht; aber auch der Physiker wird aus ihr manche Anregung schöpfen können, weil hier mit seltener Kunst der Darstellung die großen Fragen der modernen Physik in Kürze, aber doch kritisch behandelt werden.

W. Grotrian.

**A. Lotze, Die Grundgleichungen der Mechanik,** gr. 8°. 50 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1922. M. 16.—.

Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug einer ausführlichen noch ungedruckten Einführung in die Mechanik materieller Punktsysteme und starrer Körper mittels der Methoden der Graßmannschen Punktrechnung. Diese gestattet naturgemäß auch in der Mechanik eine elegante Darstellung in noch weiterem Maße, als die dem Physiker geläufige Vectorrechnung, einer speziellen Punktrechnung. Zunächst wird die Kinematik des starren Körpers entwickelt, dann folgt eine allgemeine Dynamik materieller Punkte, und schließlich die Dynamik des starren Körpers in ihren Grundgleichungen. Obwohl Verfasser sehr kurz und klar schreibt, wäre doch bisweilen eine Figur, die das Verständnis noch wesentlich erleichtert hätte, am Platze gewesen, besonders auch in der Einführung der Hauptbegriffe der Graßmannschen Punktrechnung. (Punkt, Stab, Blatt und Block und ihre uneigentlichen, das heißt unendlich fernen Elemente.)

H. Falkenhagen.

**M. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** gr. 8°. III u. 208 S. m. Abbildungen. Leipzig, S. Hirzel. 1922. Gz. 3.50, geb. Gz. 6.—.

Ausgehend von dem für die Physik und Technik so ungeheuer bedeutsamen Energieprinzip, welches gewissermaßen die Brücke schlägt zwischen den das Reich der Physik im wesentlichen erschöpfenden Hauptgebieten, der Mechanik einerseits und der Elektrodynamik andererseits, und dem Faraday-Maxwellschen Nahewirkungsprinzip leitet Verfasser im ersten Teil die allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden Körpern ab. Die Einführung der verschiedenen elektrischen und magnetischen Maßsysteme, die ja in dem Energieprinzip wurzeln, ergibt sich damit von selbst. Durchweg wird das Gaußsche Maßsystem benutzt, das sich von den sonst noch in der theoretischen Physik üblichen Systemen durch seine Verwandtschaft mit dem technischen Maßsystem auszeichnet.

Im zweiten Teil werden dann zunächst die Maxwellschen Grundgleichungen auf statische und stationäre Felder angewandt. Damit erledigt sich die Elektrostatik, Magnetostatik und der Galvanismus. Mit ganz besonderem Nachdruck wird der Satz von der Superposition der Potentiale und ihrer Eindeutigkeit betont. Die Resultate werden dabei teils von der Vorstellung der Fernwirkung, teils von der Vorstellung der Nahewirkung aus formuliert. An die allgemeinen Betrachtungen schließt sich stets die rechnerische Durchführung spezieller, der Erfahrung entstammender Beispiele an, welche die allgemeinen Begriffe und Sätze verständlich machen und anschaulich gestalten. So wird z. B. das elektrische Feld eines Plattenkondensators, einer Kugel, eines Ellipsoids, daraus als Spezialfälle das Feld des abgeplatteten und verlängerten Rotationsellipsoids, der Kreisscheibe und des sehr dünnen Drahtes ausführlich behandelt; in der Magnetostatik werden unter anderm Anwendungen auf das Feld eines permanenten und eines temporären Magneten gemacht. Weiter wird im Kapitel über Kontaktspannungen die Voltasche und galvanische offene und geschlossene Kette besprochen. Beim Galvanismus wird die ponderomotorische Wirkung zwischen permanenten Magneten und stromdurchflossenen Spulen in einem beliebigen Isolator unter Einführung des Neumannschen Potentials der Wechselwirkung berechnet.

Im anschließenden dritten Teile werden zuerst die Gesetzmäßigkeiten der quasistationären Vorgänge in geschlossenen und offenen Stromkreisen mit Hilfe der magnetischen und elektrischen Energie abgeleitet. Als Beispiel wird der lineare Leiter und die Kondensatorentladung behandelt. Im folgenden Kapitel werden die allgemeinen elektrodynamischen Gleichungen für Vorgänge in ruhenden Körpern, die also weder stationär noch quasistationär zu sein brauchen, auf den Hertzschen Oszillator, auf die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen einschließlich der Reflexion und Absorption, sowie auf die Lechersche Anordnung angewandt.

In dem folgenden letzten Kapitel des dritten Teiles leitet Verfasser die Maxwell-Hertzschen Gleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper ab. Es wird gezeigt, wie diese im Widerspruch stehen zu dem Fizeauschen Mitführungsversuch. Weiter wird die Lorentzsche Absoluttheorie, welche diese Schwierigkeit zu lösen versucht, besprochen, und alsdann gezeigt, daß auch diese, wie aus dem Experiment von Michelson und Morley folgt, ohne Zuhilfenahme der Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation noch keine Lösung des Problems darstellt.

Den Schluß bildet dann die sogenannte kleine Relativitätstheorie von Einstein, welche durch die Forderung der Invarianz der Gleichungen gegenüber einer linearen Raum-Zeittransformation die ganzen Schwierigkeiten mit einem Schlage löst.

Man kann wohl behaupten, daß das Werk des bekannten Autors ganz hervorragend ist. Kürzer und klarer sich auszudrücken und das ganze Gebiet der Elektrodynamik aufzubauen, ist einfach undenkbar.

Mit diesem Werk hat sich die Zahl der als ausgezeichnet bekannten Planckschen Monographien um eine weitere vermehrt, und wir möchten wünschen, daß den bereits erschienenen Monographien weitere folgen mögen.

H. Falkenhagen.

**J. Becquerel, Le Principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation.** Leçons professées en 1921 et 1922 à l'École Polytechnique et au Muséum d'Histoire naturelle. gr. 8°. X et 342 pages avec 21 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1922. Broché fr. 25.—.

Infolge der rasch steigenden Beachtung und Anteilnahme, die sich die Relativitätstheorie auch in Frankreich errungen hat, hat der bekannte mathematisch-physikalische Verlag von Gauthier-Villars et Cie. in Paris die Herausgabe einer besonderen Collection sur la Relativité begonnen. Dieser Sammlung ge-

hört das vorliegende ausgezeichnete einführende Lehrbuch der Relativitätstheorie an. Es behandelt sowohl die spezielle wie die allgemeine Theorie. Seine Darstellung zeichnet sich besonders dadurch aus, daß die grundlegenden Gesichtspunkte, vor allem die mathematischen, sehr ausführlich entwickelt und erörtert werden. Bezüglich der speziellen Relativitätstheorie ist es sehr zu begrüßen, daß bei ihr an erster Stelle die älteren Darstellungsweisen, wie sie sich in der grundlegenden Abhandlung Einsteins aus dem Jahre 1905 finden, benutzt werden, da sie den eigentlichen physikalischen Sinn der Gedankenentwicklungen meist deutlicher erkennen lassen als die späteren eleganten Methoden. Andererseits sei hinsichtlich der allgemeinen Relativitätstheorie besonders hervorgehoben, daß hier auch von dem 1917 durch Levi-Cività aufgestellten Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors im Riemannschen Raume Gebrauch gemacht wird (S. 170f. und S. 179f.); dadurch wird die geometrische Anschaulichkeit gewisser sehr wichtiger Begriffe und Entwicklungen außerordentlich erhöht und außerdem das Verständnis der Nicht-Riemannschen Geometrie, wie sie bei der später besprochenen Verallgemeinerung der Einsteinschen Theorie benutzt wird, vorbereitet und wesentlich erleichtert. Ausführlich wird auch die Beziehung des Prinzips der kleinsten Wirkung zur allgemeinen Relativitätstheorie erörtert; hier sind außer den bekannten Ansätzen Einsteins die wertvollen Abhandlungen von H. A. Lorentz und Hilbert verarbeitet worden (S. 257—262). Auch die neueren Fortbildungen der Theorie sind aufgenommen worden. So wird die von Einstein 1919 aufgestellte Theorie der Materie behandelt (S. 272—278). Ferner wird Einsteins geschlossene Zylinderwelt (S. 280—290) und daneben auch eingehend die hyperbolisch geschlossene Welt von De Sitter beschrieben (S. 291—300). Den Schlußteil des Buches (S. 309—332) nehmen die schon oben gestreiften Verallgemeinerungen der Einsteinschen Theorie ein, die man vor allem Weyl und ganz jüngst Eddington verdankt und die bekanntlich auch das elektromagnetische Feld ebenso wie das Schwerefeld auf geometrischem Wege zu erklären versuchen.

Das vorliegende Buch bietet somit auf mäßigem Raume einen außerordentlich reichen Inhalt; es führt den Leser in streng wissenschaftlicher und zugleich leicht verständlicher und gefälliger Weise von den Anfängen bis zu den jüngsten Fortschritten und Weiterbildungen der Relativitätstheorie. Daher verdient das Werk durchaus eine sehr warme Empfehlung.

F. Jüttner.

---

**J. Pacotte, La Physique théorique nouvelle.** Préface de M. E. Borel. gr. 8°. VIII et 182 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1921. Broché fr. 12.—.

Die kleine Schrift gibt einen Überblick über die gegenwärtige theoretische Physik, wobei in den Mittelpunkt die Lehre vom elektrischen Felde nach Maxwell und H. A. Lorentz gestellt wird. Dabei legt der Verfasser den Hauptwert auf die Darstellung der historischen Entwicklungsstufen und die logisch-kritische Beleuchtung der Zusammenhänge derselben. Dadurch erklärt sich wohl auch die zuerst etwas befremdend wirkende Eigentümlichkeit des Buches, daß es trotz seiner streng wissenschaftlichen Art die mathematische Formelsprache nicht benutzt, sondern den Kern der maßgebenden Gleichungen in Worten widergibt. Im übrigen scheint die Schrift schon vor längerer Zeit fertiggestellt worden zu sein. Denn die allgemeine Relativitätstheorie ist nicht berücksichtigt worden, sondern nur die spezielle Theorie und die älteren Vorarbeiten zur allgemeinen von Einstein und Abraham etwa bis zum Jahre 1912. Auch bei der Quantentheorie wird die ältere Entwicklung bevorzugt und das Bohrsche Atommodell von 1913 nur kurz erwähnt. Ferner ist die auf S. 54 gegebene experimentelle Beurteilung des starren und deformierbaren Elektrons überholt. Trotz des also schon etwas veralteten Standpunktes der Schrift wirken die in ihr gegebenen interessanten methodologischen Erörterungen sehr anregend.

F. Jüttner.

---

**M. Franck, La Loi de Newton est la Loi unique.** Théorie mécanique de l'Univers. gr. 8°. 158 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1921. Broché fr. 12.50.

In der vorliegenden Schrift gibt der Verfasser einen von ihm selbst herrührenden synthetischen Aufbau der physikalischen Welt, die er außerdem in eigentümlicher Weise mit der geistigen Welt verknüpft. Den Raum faßt er dabei auf als zusammengesetzt aus einem sogenannten positiven Gebiete, dem im Vakuum gelegenen Kraftfelde, und sogenannten negativen Raumelementen, die als Löcher im Kraftfelde bezeichnet werden und die träge Materie darstellen (also ähnlich wie in der jüngsten Weylschen Auffassung der Materie). Als Kraftgesetz dient dabei das Newtonsche Gravitationsgesetz. Während die Entwicklungen des Verfassers anfangs mathematisch formuliert sind, werden sie im weiteren Verlaufe bald rein qualitativ, worin der Verzicht auf die strenge Durchführung der Theorie liegt. Als charakteristisch für das dargebotene System sei noch angegeben, daß in ihm die Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen der Elektrodynamik nicht auftreten, jede Beziehung zum Relativitätsprinzip fehlt und auch das Quantenprinzip nicht gestreift wird.

F. Jüttner.

---

## Personalien.

**(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

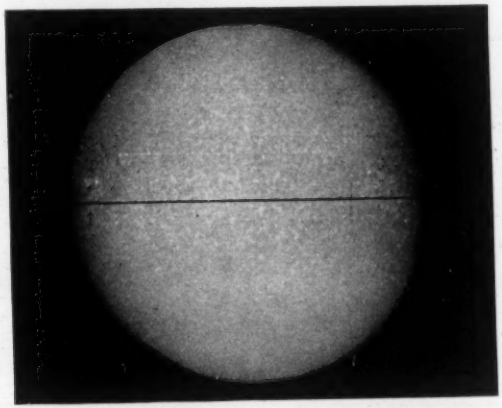
**Habilitiert:** An der Technischen Hochschule in Neapel Dr. Francesco Giordani für Elektrochemie.

**Ernannt:** Der a.o. Professor für chemische Technologie an der Universität Göttingen Dr. Artur Kötz zum ord. Professor ebenda, der Leiter des Mineralchemischen Instituts der Gesellschaft für Braunkohlen- und Mineralölforschung in Berlin Dr. Fritz Frank zum Honorarprofessor an der Technischen Hochschule daselbst, der Privatdozent an der Universität Würzburg, z. Z. Assistent an der Universität Hamburg, Dr. Walter Schottky zum etatsmäßigen a.o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Rostock, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Hamburg Dr. Wilhelm Blaschke in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Stuttgart, der ord. Professor der Physik an der Universität Lund Dr. Manne Siegbahn in gleicher Eigenschaft an der Universität Upsala.

**Gestorben:** Der emer. ord. Professor der Physik an der Universität Kasan Dr. Dmitrij Alexandrovič Goldhammer, der frühere ord. Professor für technische Chemie an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Georg Lunge, der ord. Professor der Physik an der Universität Upsala Dr. Gustaf Granqvist.

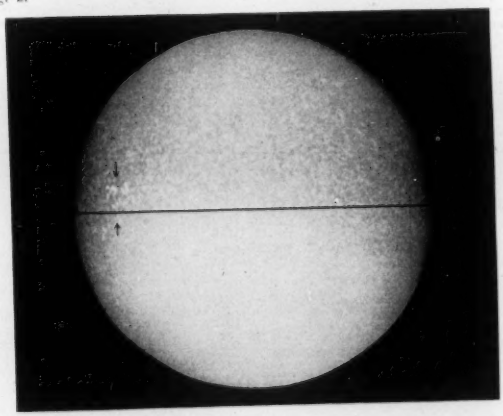
Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Hans Küstner in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Fig. 1.




26. September 1913. 7h 22m P. S. T.

Fig. 2.

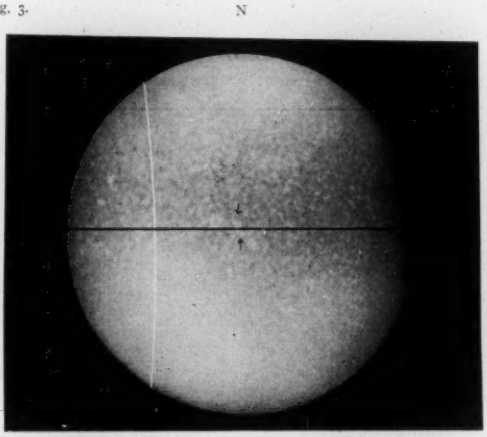



27. September 1913. 7h 40m P. S. T.

Aufnahmen des Mount Wilson Solar Observatory.

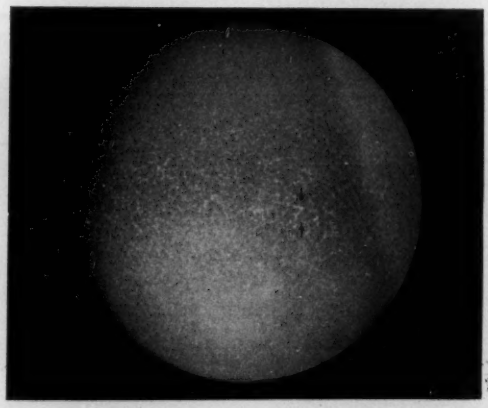
OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY.

Fig. 3.




30. September 1922. $9^h\,38^m$ P. S. T.

Fig. 4.

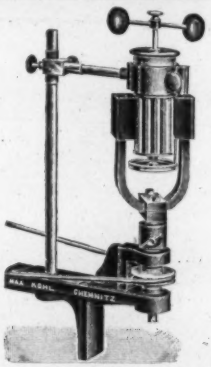



2. Oktober 1913. $7^h\,35^m$ P. S. T.

Aufnahmen des Mount Wilson Solar Observatory.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY.

# Max Kohl A.G. Chemnitz



52 068. Modell eines Kurzschlussankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

**Physikalische Apparate**

**Funken-Induktoren**

**Ölluftpumpen**

**Experimentier-Schalttafeln**

**Projektions-Apparate**

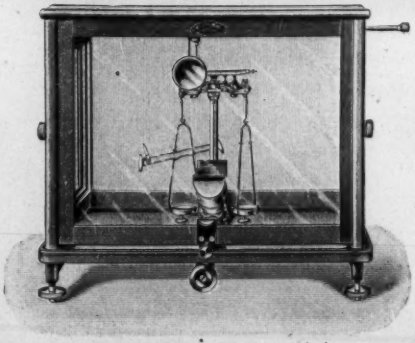
**Laboratorienmöbel**

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel: 4 Grosse Preise; Turin: 2 Grosse Preise; Dresden: Grosser Preis.

# Sartorius-Werke A.-G. Göttingen Prov. Hannover

**Analysen- und Präzisions-Wagen** für feine und feinste Wägungen in bekannt sauberster Ausführung.



**Sartorius'-**
**Mikro-chemische**
**Analysenwage.**

D. R. G. M. 786129—796130

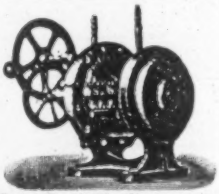
*Unsere Fabrikate sind in allen einschlägigen Geschäften zu Originalpreisen erhältlich.*

Katalog „Präcis 46" kostenfrei.

# Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Gegründet 1890

Fabrik physikalischer, chemischer und technischer Apparate

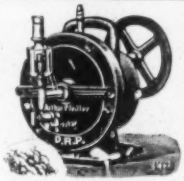


Rotier. Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Pfeiffer. D. R. P.

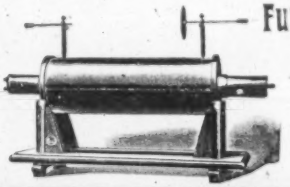
## Spezialfabrik für Hochvakuumpumpen

zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken

Alle Arten Luftpumpen, Kolben-Ölluftpumpen, rotierende Ölluftpumpen, rotierende Quecksilberluftpumpen für Betrieb und Laboratorium



Rotierende Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Gaede. D. R. P.



## Funkeninduktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Normaltypen von 6—1000 mm Funkenlänge mit Unterbrechern aller Art

Spezial-Funkeninduktoren für technische und wissenschaftliche Zwecke

Listen kostenlos von Abteilung E verlangen.

# E. Leybold's Nachf. A.-G.

Cöln a/Rhein

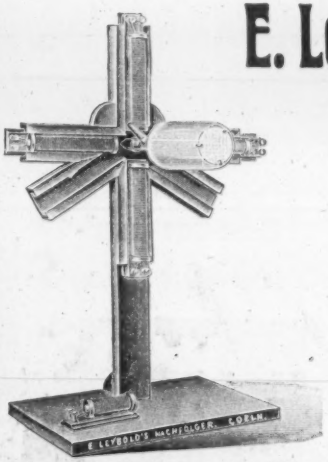
## Fabrik physikalischer Apparate

Zweigniederlassung:

Berlin NW 7, Dorotheenstraße 53

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

Hochvakuumpumpen nach Gaede




*Universalstativ für Braun'sche Röhre nach Simon und Reich.*

*Katalog, enthaltend 16000 Nummern, wird Instituten auf Wunsch übersandt.*


Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.